

Sistem Persamaan Non Linier (Metode Terbuka)

Metode Secant

- Kekurangan Metode Newton Raphson adalah diperlukannya turunan pertama (differensial) dari $f(x)$ dalam hitungan. Kadang-kadang sulit untuk mendiferensialkan persamaan yang diselesaikan.
- Metode Secant merupakan perbaikan dari metode regula-falsi dan Newton Raphson, dimana kemiringan dua titik dinyatakan secara diskrit dengan mengambil bentuk garis lurus yang melalui satu titik

dua titik:

$$(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$$

dan

$$(x_i, f(x_i))$$

Kemiringan garis yang menghubungkan kedua titik tersebut adalah:

$$m = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Karena garis secant digunakan untuk memperkirakan posisi $f(x) = 0$, dari persamaan garis diperoleh:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{m}$$

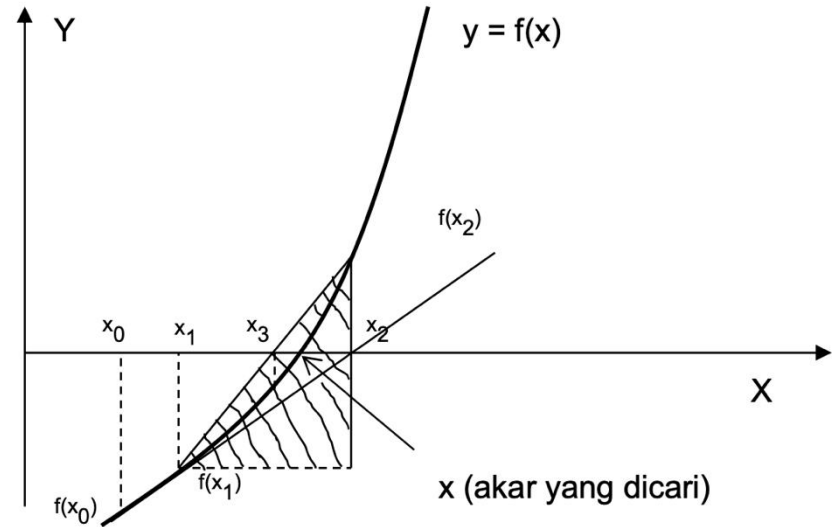
Substitusi nilai m :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}$$

sehingga:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Itulah rumus metode Secant.



Yang disubstitusikan dalam persamaan :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Dalam metode ini pendekatan memerlukan dua nilai awal dari x

Contoh :

Selesaikan persamaan : $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$
dengan metode Secant

Penyelesaian :

Iterasi 1

$$x_2 = 2 \rightarrow \text{Untuk } x_2 = 2 \text{ maka } f(x_2) = f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 3(2) - 3 = 3$$

$$x_1 = 1 \rightarrow \text{Untuk } x_1 = 1 \text{ maka } f(x_1) = f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 = -4$$

Dengan menggunakan persamaan :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 2 - \frac{3(2 - 1)}{3 - (-4)} = 1,57142$$

Maka :

$$f(x_3) = (1,57142)^3 + (1,57142)^2 - 3(1,57142) - 3 = -1,36449$$

Iterasi 2

$$\text{Untuk } x_2 = 2 \text{ maka } f(x_2) = f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 3(2) - 3 = 3$$

Untuk $x_3 = 1,57142$ maka

$$f(x_3) = (1,57142)^3 + (1,57142)^2 - 3(1,57142) - 3 = -1,36449$$

Dengan menggunakan persamaan :

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 1,57142 - \frac{-1,36449(1,57142 - 2)}{-1,36449 - 3} = 1,70540$$

Hitungan dilanjutkan dengan prosedur yang sama dan hasilnya diberikan dalam tabel berikut :

Jumlah iterasi	x_1	x_2	x_3	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$
1	1,0	2,0	1,57142	-4,0	3,0	-1,36449
2	2,0	1,57142	1,70540	+3,0	-1,36449	-0,24784
3	1,57142	1,70540	1,73513	-1,36449	-0,24784	0,02920
4	1,70540	1,73513	1,73199	-0,24784	0,02920	-0,000575
5	1,73513	1,73199	<u>1,73205</u>			

SOAL

1. Cari Akar persamaan dengan metode newton Raphson dan secant
 $x^3 - x - 2$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

2. Cari dengan Bisection, Regula Falsi, Newton Raphson dan Secant
 $x^3 + x^2 - 3x - 3$

Metode Iterasi / Direct Method

Dalam metode iterasi ini digunakan suatu persamaan untuk memperkirakan nilai akar persamaan. Persamaan tersebut dikembangkan dari fungsi $f(x) = 0$ sehingga parameter x berada disisi kiri dari persamaan, yaitu :

$$x = g(x)$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa nilai x merupakan fungsi dari x , sehingga dengan memberi nilai perkiraan awal dari akar dapat dihitung

x_i perkiraan baru x_{i+1} dengan rumus iteratif berikut : $x_{i+1} = g(x_i)$

Besar kesalahan dihitung dengan rumus berikut :

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

Contoh :

Selesaikan persamaan : $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$
dengan metode Iterasi

Penyelesaian :

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$x^3 = -x^2 + 3x + 3 \rightarrow x = (-x^2 + 3x + 3)^{1/3}$$

Kemudian persamaan diubah menjadi :

$$x_{i+1} = (-x_i^2 + 3x_i + 3)^{1/3}$$

Apabila ditentukan perkiraan awal $x_1 = 2$ maka didapat :

$$x_2 = (-x_1^2 + 3x_1 + 3)^{1/3} = (-2^2 + 3 \times 2 + 3)^{1/3} = 1,70998$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| \times 100\% = \left| \frac{1,70998 - 2}{1,70998} \right| \times 100\% = 16,9607\%$$

Hitungan dilanjutkan dengan prosedur yang sama dan hasilnya diberikan dalam tabel berikut :

Iterasi (i)	x_i	ε_a (%)
1	2,00000	
2	1,70998	16,9607
3	1,73313	1,3362
4	1,73199	0,0658
5	1,73205	0,0034
6	1,73205	0,0002

Dari tabel terlihat bahwa hasil hitungan pada iterasi yang lebih tinggi semakin dekat dengan akar persamaan yang benar, dengan kata lain kesalahan yang terjadi semakin kecil. Penyelesaian persamaan seperti ini disebut konvergen

Persamaan $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ dapat juga diubah dalam bentuk berikut :

$$x = \frac{x^3 + x^2 - 3}{3}$$

Dalam bentuk iterasi persamaan diatas menjadi :

$$x_{i+1} = \frac{x_i^3 + x_i^2 - 3}{3}$$

Untuk perkiraan awal $x_1 = 2$ maka didapat :

$$x_2 = \frac{x_1^3 + x_1^2 - 3}{3} = \frac{2^3 + 2^2 - 3}{3} = 3$$

Besar kesalahan :

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| \times 100\% = \left| \frac{3 - 2}{3} \right| \times 100\% = 33,3333\%$$

Dengan prosedur yang sama hitungan dilanjutkan dan hasilnya diberikan dalam tabel berikut ini :

Iterasi (i)	x_i	ε_a (%)
1	2,00000	
2	3,00000	33,3333
3	11,00000	72,7273
4	483,00000	97,7226
5	37637290,0	99,9987

Tampak bahwa hasil hitungan pada iterasi yang lebih tinggi semakin menjauhi nilai akar persamaan yang benar. Keadaan hitungan seperti ini disebut divergen.