

Sistem Persamaan Non Linier (Metode Terbuka)

Penyelesaian Persamaan Non Linier

- Metode Terbuka
 - Diperlukan tebakan awal
 - x_n dipakai untuk menghitung x_{n+1}
 - Hasil dapat konvergen atau divergen

Metode Terbuka

Kelebihan:

- Konvergensi yang dihasilkan lebih cepat.

Kelemahan:

- Tidak selalu menemukan akar (divergen).
- Kemungkinan sulit dalam mencari $f'(x_n)$.
- Penetapan harga awal (x_n) yang sulit.

Metode Newton-Raphson

- Metode Newton Raphson adalah metode yang digunakan dalam mencari nilai suatu akar dari sebuah fungsi $f(x)$ dengan pendekatan satu titik, dimana fungsi $f(x)$ ini memiliki turunan.
- Beberapa sifat dari Metode Newton antara lain:
 1. Tidak perlu mencari dua fungsi yang berbeda tanda.
 2. Konvergensi lebih cepat
 3. Perlu menghitung turunan fungsi $f'(x)$

Misalkan kita memiliki fungsi $f(x)$ dan tebakan awal akar x_i .

Pada titik $(x_i, f(x_i))$, gradien garis singgung adalah:
$$m = f'(x_i)$$

Persamaan garis lurus secara umum adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

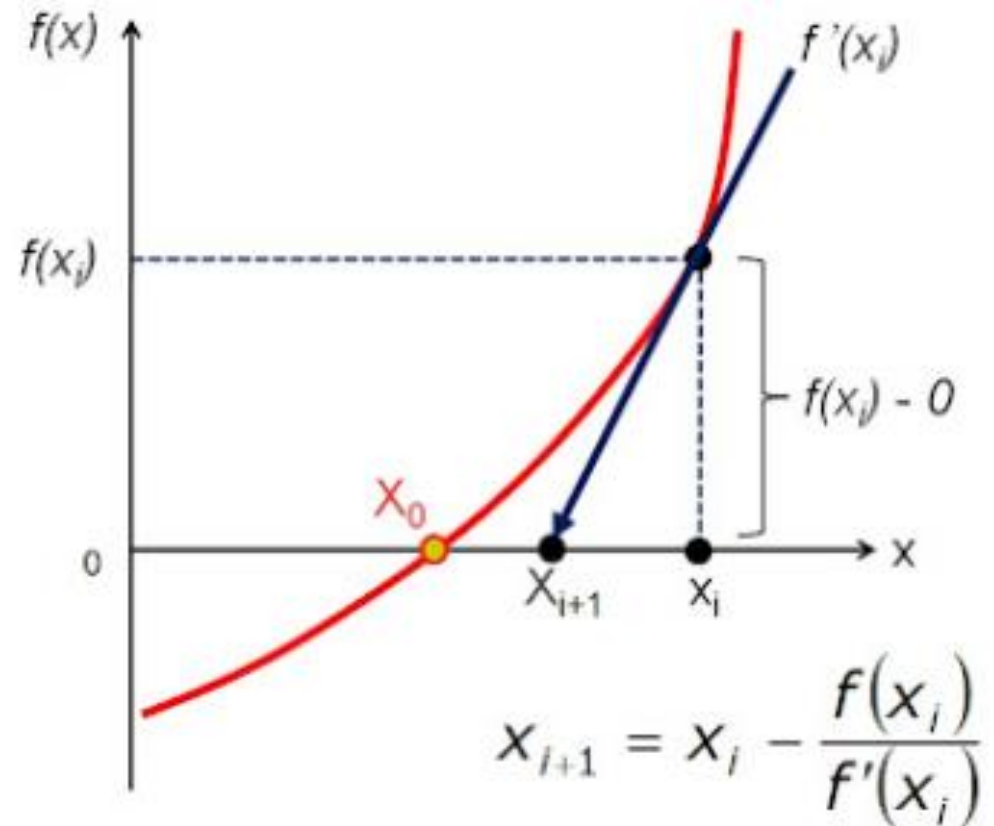
Karena titik yang digunakan adalah $(x_i, f(x_i))$, maka:

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

Sehingga:

$$\boxed{y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)}$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan garis singgung kurva pada titik x_i .



Mencari titik potong garis singgung dengan sumbu- x

Akar persamaan adalah titik ketika nilai fungsi sama dengan nol. Oleh karena itu, pada titik potong garis singgung dengan sumbu- x , kita tetapkan:

$$y = 0$$

Substitusikan ke persamaan garis singgung:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

Kemudian pindahkan $f(x_i)$ ke ruas kanan:

$$-f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

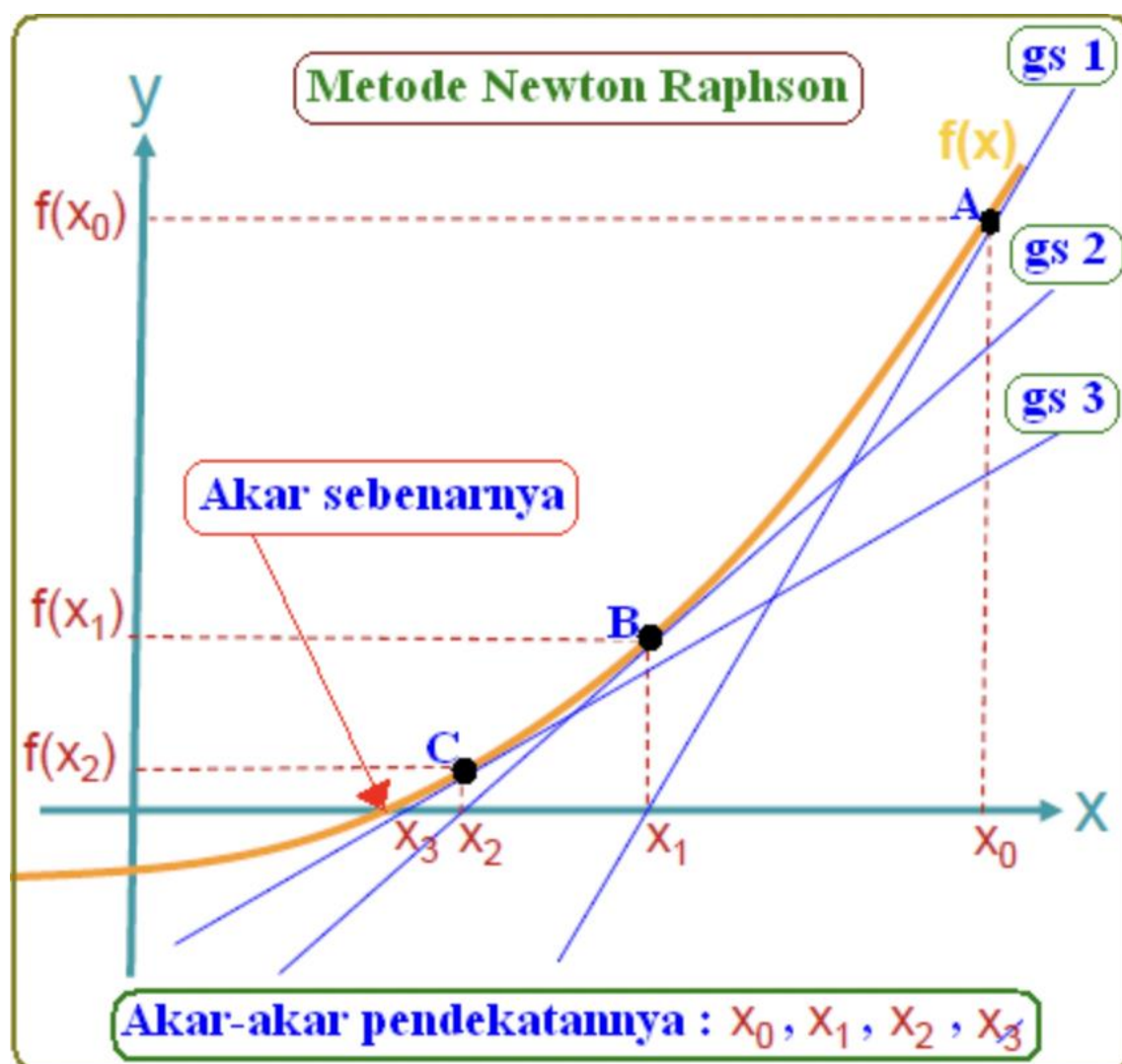
Bagi kedua ruas dengan $f'(x_i)$:

$$-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x - x_i$$

Maka:

$$x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Karena titik potong ini digunakan sebagai perkiraan akar selanjutnya, kita beri nama x_{i+1}



Metode Newton-Raphson

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penyelesaian persamaan dengan metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut :

1. Pilih nilai awal x_i sembarang
2. Hitung x_{i+1} dan $f(x_{i+1})$ dengan rumus :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

3. Demikian seterusnya sampai didapatkan aproksimasi error terkecil / nilai $f(x_{i+1})$ yang kecil

Contoh :

Selesaikan persamaan :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

dengan metode Newton Raphson

Penyelesaian :

Persamaan yang diselesaikan :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

Turunan pertama dari persamaan itu adalah :

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

- Dengan menggunakan persamaan :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Pada awal hitungan ditentukan nilai x_i sembarang, misalnya $x_1 = 1$;

$$f(x_1) = f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 = -4$$

$$f'(x_1) = f'(1) = 3(1)^2 + 2(1) - 3 = 2$$

$$x_2 = 1 - \frac{-4}{2} = 3$$

Langkah berikutnya ditetapkan $x_2 = 3$

$$f(x_2) = f(3) = (3)^3 + (3)^2 - 3(3) - 3 = 24$$

$$f'(x_2) = f'(3) = 3(3)^2 + 2(3) - 3 = 30$$

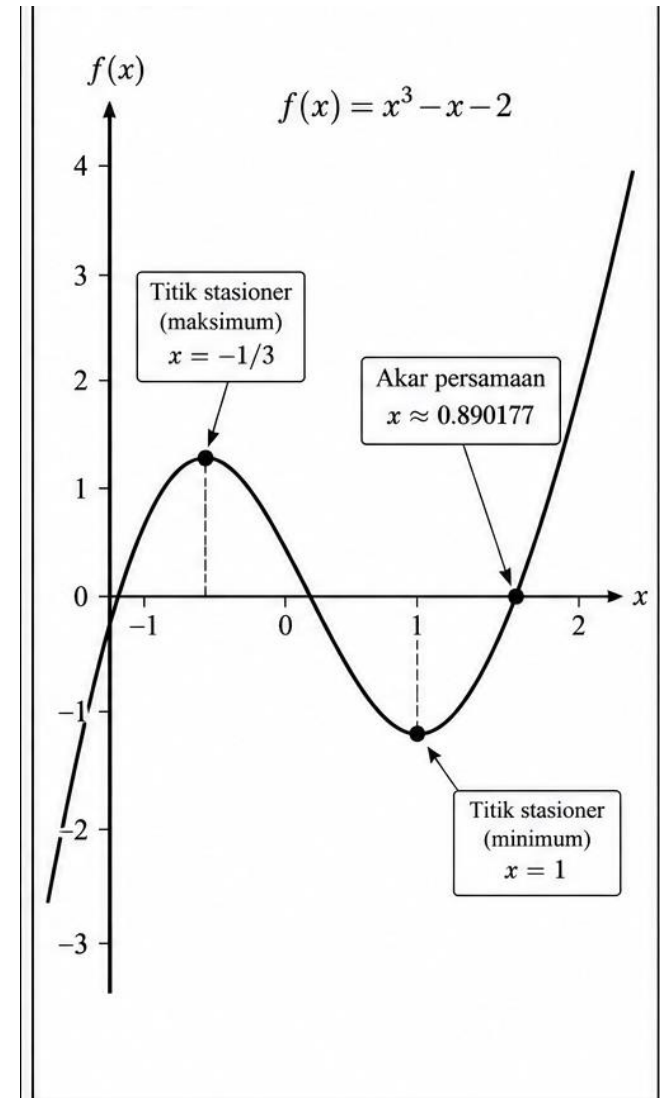
$$x_3 = 3 - \frac{24}{30} = 2,2$$

Hitungan dilanjutkan dengan prosedur yang sama dan hasilnya diberikan dalam tabel berikut ini :

Jumlah iterasi	x_i	x_{i+1}	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$
1	1,0	3,0	-4,0	24,0
2	3,0	2,2	24,0	5,888
3	2,2	1,83	5,888	0,987387
4	1,83	1,73778	0,987387	0,05442
5	1,73778	<u>1,73207</u>	0,05442	0,0001816

Kelemahan Newton -Raphson

- Turunan persamaan sering kali sulit untuk diperoleh
- Karena kita menentukan titik awal hanya 1, maka sering didapatkan/ditemukan akar yang divergen. Hal ini disebabkan karena: titik pendekatan tidak dapat digunakan jika merupakan titik ekstrim atau titik puncak.
- Sulit memperoleh penyelesaian ketika titik terlalu dekat dengan titik stasioner.
- Untuk menghindarinya, penentuan titik pendekatan dapat menggunakan bantuan metode tabel.



- Titik stasioner adalah titik yang Dimana gradient/turunan pertama sama dengan 0 / $f'(x_i) = 0$, sehingga garis singgung akan mendatar
- Metode Newton Raphson jika titik awal berada terlalu dekat dengan titik stasioner $f'(x_i)$ bisa sangat kecil sehingga iterasi tidak stabil