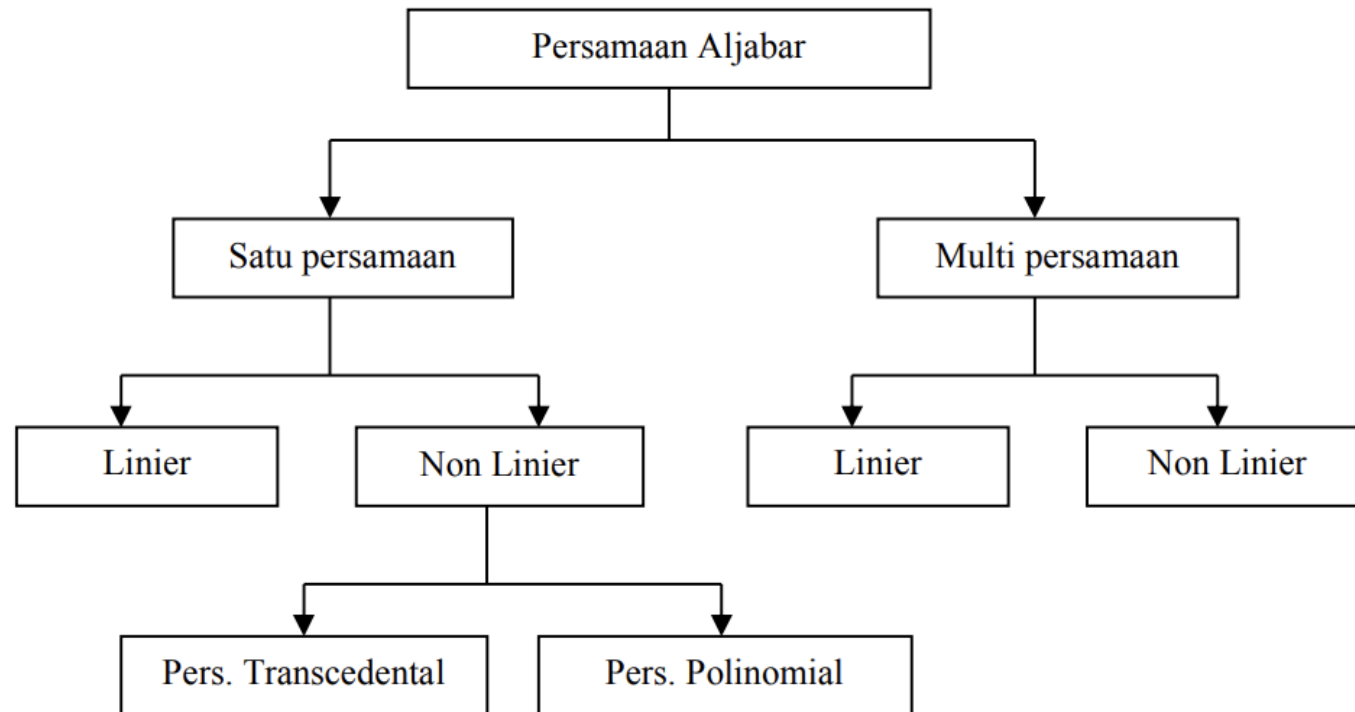


# Akar-Akar Persamaan

# Sistem Persamaan Aljabar



Bentuk-bentuk persamaan transcendental :  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $e^x$ ,  $\log x$

Contoh :  $3x - \sin x - e^x$

Bentuk-bentuk persamaan polinomial :  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$

Contoh :  $x^4 + x^2 + 2x + 20 = 0$

Bentuk persamaan kuadrat dengan bentuk  $ax^2 + bx + c = 0$

- Untuk polinomial derajat tiga atau empat, rumus yang ada sangat kompleks dan jarang sekali digunakan.
- Sedangkan untuk persamaan-persamaan dengan derajat yang lebih tinggi tidak ada rumus yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya
- Penyelesaian numerik dilakukan dengan iterasi, sehingga setiap hasil yang didapat selalu lebih teliti dibandingkan iterasi sebelumnya.

Ada beberapa metode yang digunakan untuk menghitung akar-akar persamaan yaitu:

- Metode Tabel
- metode Biseksi
- metode Regula Falsi
- metode Iterasi Sederhana
- metode Newton Raphson
- Metode Secant

# Akar Persamaan Non Linier

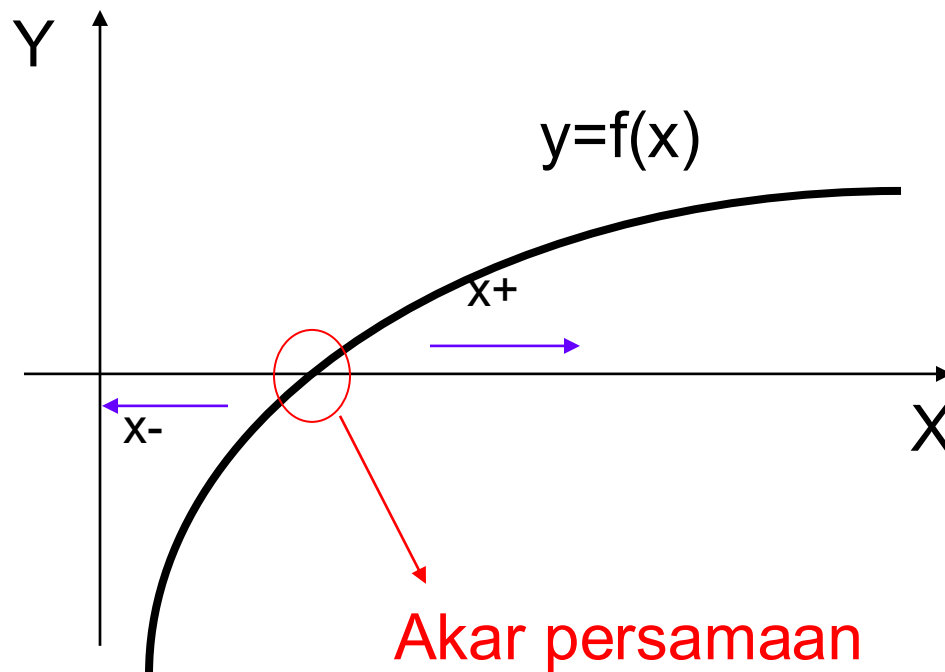
- Permasalahan penyelesaian persamaan Non linier adalah permasalahan menentukan akar persamaan  $f(x)=0$
- Pada persamaan linier  $2x+1=0$ , nilai  $x$  dapat dicari dengan mudah, yaitu  $x=-1/2$
- Pada persamaan kuadrat  $x^2+3x+2=0$ , nilai  $x$  dapat dicari dengan rumus ABC, yaitu  $x=-2$  dan  $x=-1$
- Bagaimana menentukan akar persamaan non-linier dari :  $x.e^{-x}-1=0$  atau  $x^4 + x^2 + 2x + 20 = 0$  ??

# Penyelesaian Persamaan Non Linier

- Metode Tertutup
  - Mencari akar pada range  $[a,b]$  tertentu
  - Dalam range  $[a,b]$  dipastikan terdapat satu akar
  - Hasil selalu konvergen → disebut juga metode konvergen
- Metode Terbuka
  - Diperlukan tebakan awal
  - $x_n$  dipakai untuk menghitung  $x_{n+1}$
  - Hasil dapat konvergen atau divergen

# Sifat-sifat akar persamaan

- Nilai  $f(x)=0$
- Secara geometri  $f(x)$  berpotongan dengan sumbu



*Sifat-sifat ini yang digunakan dalam metode-metode pencarian akar persamaan dalam metode numerik*

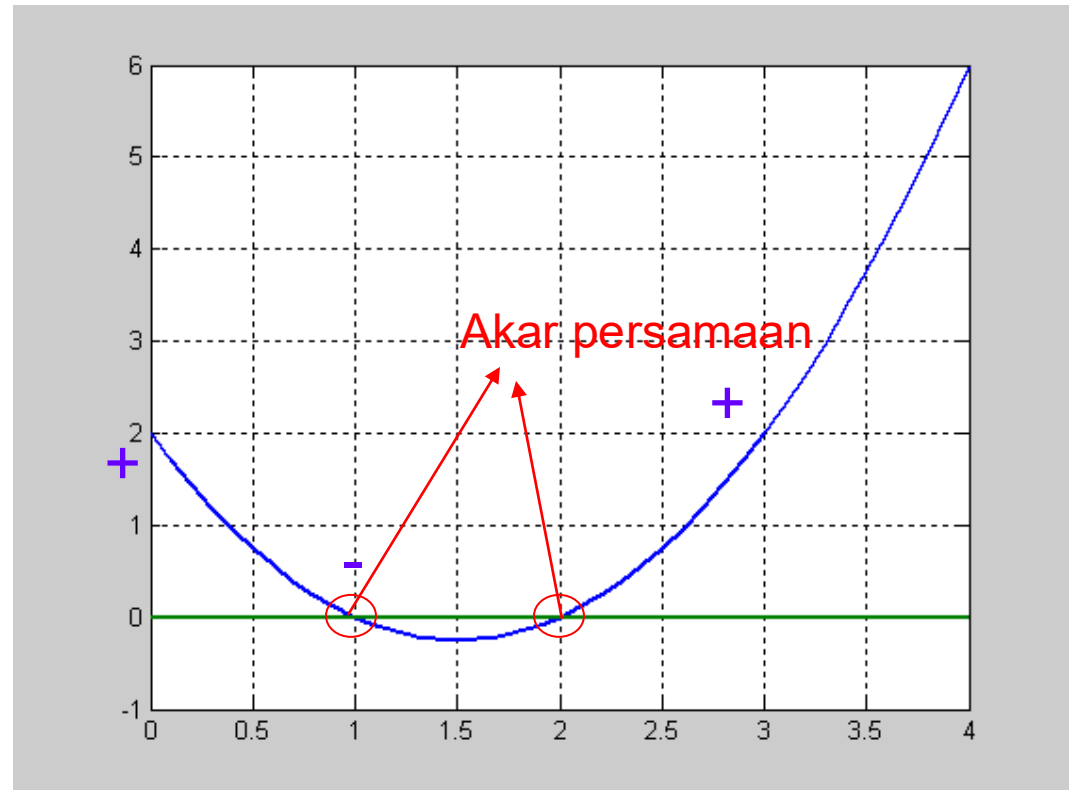
# Sifat akar pada persamaan kuadrat

Akar persamaan  $x^2-3x+2=0$  dapat dihitung menggunakan pemecahan suku sebagai berikut:

$$x^2-3x+2=0$$

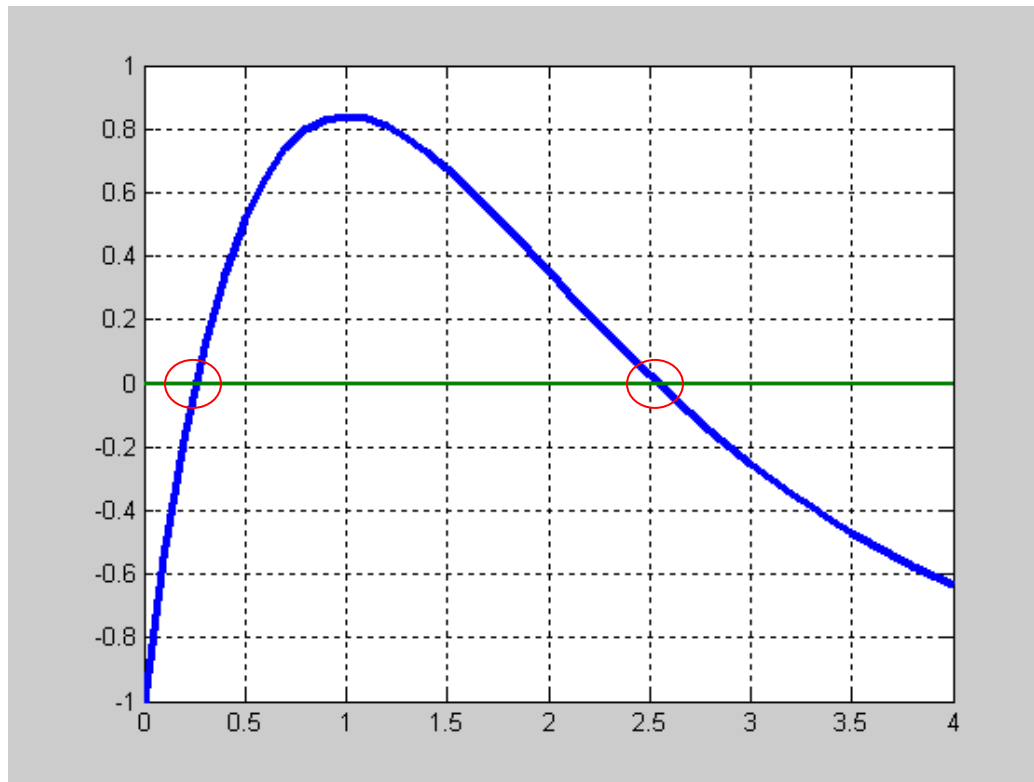
$$(x-1)(x-2)=0$$

Akar :  $x=1$  dan  $x=2$



# Sifat akar pada persamaan non linear

Akar persamaan  $5x \cdot e^{-x} - 1 = 0$  dapat dilihat dari grafik  $y = 5x \cdot e^{-x} - 1$  sebagai berikut:



Akar ada di sekitar 0-0.5 dan di sekitar 2.5

# Metode Tertutup

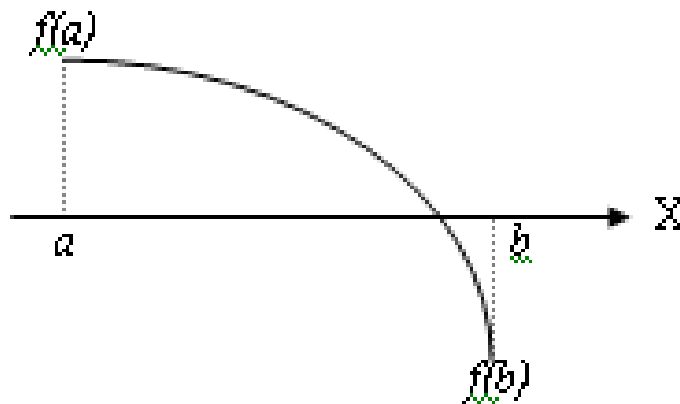
- Metode Tabel
- Metode Biseksi
- Metode Regula Falsi

# Metode Terbuka

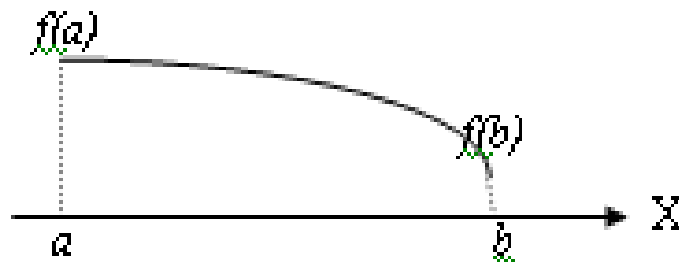
- Metode Iterasi Sederhana
- Metode Newton-Raphson
- Metode Secant.

# Theorema

- Suatu range  $x=[a,b]$  mempunyai akar bila  $f(a)$  dan  $f(b)$  berlawanan tanda atau memenuhi  $f(a).f(b)<0$
- Theorema di atas dapat dijelaskan dengan grafik-grafik sebagai berikut:



Karena  $f(a).f(b)<0$  maka pada range  $x=[a,b]$  terdapat akar.



Karena  $f(a).f(b)>0$  maka pada range  $x=[a,b]$  tidak dapat dikatakan terdapat akar.

# Metode Table

- Metode Table atau pembagian area.
- Dimana untuk  $x$  di antara  $a$  dan  $b$  dibagi sebanyak  $N$  bagian dan pada masing-masing bagian dihitung nilai  $f(x)$  sehingga diperoleh tabel :

| $X$     | $f(x)$   |
|---------|----------|
| $x_0=a$ | $f(a)$   |
| $x_1$   | $f(x_1)$ |
| $x_2$   | $f(x_2)$ |
| $x_3$   | $f(x_3)$ |
| .....   | .....    |
| $x_n=b$ | $f(b)$   |

# Algoritma Metode Tabel

- 1) Tentukan  $F(x)$
- 2) Tentukan  $a$  dan  $b$  sebagai batas bawah dan batas atas range dimana  $F(a)$  berlawanan tanda dengan  $F(b)$
- 3) Tentukan step  $h$
- 4) Lakukan looping  $x$  dari  $a$  sampai  $b$  dengan step  $h$ :
  - a) Hitung  $F(x)$
  - b) Bila  $F(x)$  dan  $F(x+h)$  berlawanan tanda maka akar ada di  $F(x)$  atau  $F(x+h)$  yang nilainya paling dekat dengan nol dan hentikan looping

# Contoh :

Akar persamaan  $5xe^{-x}-1=0$  :

Akar berada di antara 0  
sampai 0.5, maka  $x_{\text{bawah}}=0$   
dan  $x_{\text{atas}}=0.5$

Dengan step 0.05 diperoleh:

| x    | F(x)     |
|------|----------|
| 0    | -1       |
| 0.05 | -0.76219 |
| 0.1  | -0.54758 |
| 0.15 | -0.35447 |
| 0.2  | -0.18127 |
| 0.25 | 0.0265   |
| 0.3  | 0.111227 |
| 0.35 | 0.233204 |
| 0.4  | 0.34064  |
| 0.45 | 0.434663 |
| 0.5  | 0.516327 |

Akar  $x=0.25$  dengan aproksimasi eror=0.0265

# Contoh :

Akar persamaan  $5xe^{-x}-1=0$  dapat dicari dengan menentukan  $x_{\text{bawah}}=0$  dan  $x_{\text{atas}}=0.3$

Dengan step 0.025 diperoleh:

| x     | F(x)     |
|-------|----------|
| 0     | -1       |
| 0.025 | -0.87809 |
| 0.05  | -0.76219 |
| 0.075 | -0.6521  |
| 0.1   | -0.54758 |
| 0.125 | -0.44844 |
| 0.15  | -0.35447 |
| 0.175 | -0.26548 |
| 0.2   | -0.18127 |
| 0.225 | -0.10167 |
| 0.25  | 0.0265   |
| 0.275 | 0.044412 |
| 0.3   | 0.111227 |

Akar  $x=0.25$  dengan  $e=0.0265$

## Kelemahan Metode Table

Metode table ini secara umum sulit mendapatkan penyelesaian dengan error yang kecil, Tetapi metode ini digunakan sebagai taksiran awal mengetahui area penyelesaian yang benar sebelum menggunakan metode yang lebih baik dalam menentukan penyelesaian.

# Latihan

- Dapatkan akar persamaan  $x^2-5x+3=0$  menggunakan metode tabel,
- Buktikan bahwa akar persamaan dari  $x^2-3x+2=0$  adalah  $x=2$  dan  $x=1$

# Metode Biseksi

- Ide awal metode ini adalah metode table, dimana area dibagi menjadi  $N$  bagian.
- Hanya saja metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung dan bagian yang tidak mengandung akar dibuang. Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.

# Metode Bisection

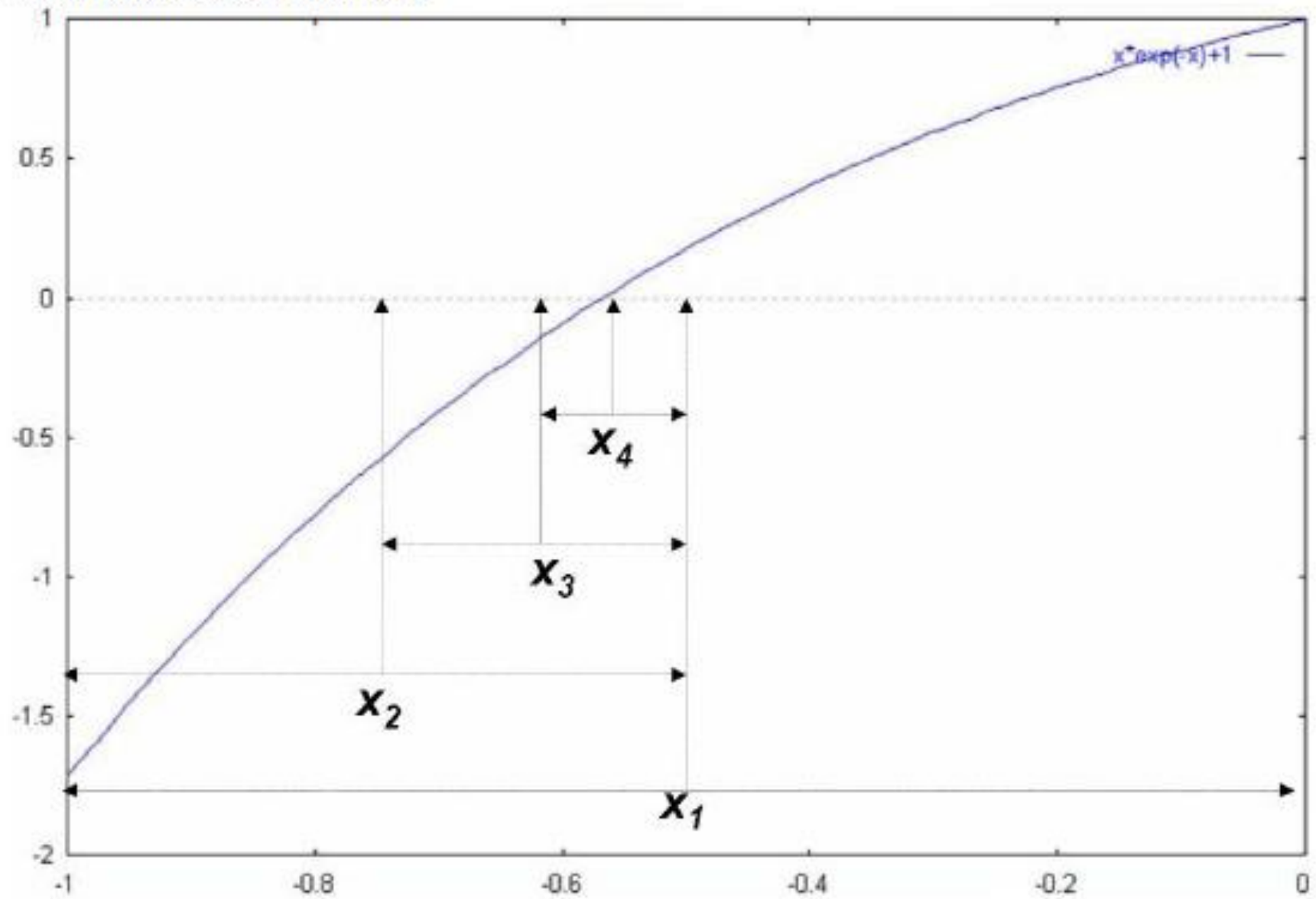
Pendekatan sederhana mencari akar adalah secara iteratif dengan **metode titik tengah** (*bisection*):

1. bagi selang  $[a, b]$  menjadi dua dengan titik tengah
$$c = (a + b) / 2$$
2. ada dua sub-selang:  $[a, c]$  dan  $[c, b]$ . Pilih selang iterasi yang baru dengan syarat nilai fungsi di ujung selang berbeda tanda.
3. ulangi langkah 1 dan 2 sampai ukuran selang  $< \varepsilon$  (epsilon adalah nilai yang sangat kecil yang menyatakan toleransi kesalahan akar yang diinginkan, misalnya  $\varepsilon = 0.001$ ,  $0.000001$ , dsb)

Untuk menemukan akar persamaan dari  $f(x) = 0$  dengan  $f$  kontinu pada selang  $[a, b]$  dengan  $f(a)$  dan  $f(b)$  mempunyai tanda yang berlawanan.

- INPUT: titik awal  $a$  dan  $b$ , toleransi  $TOL$ , putaran maksimal  $N$ .  
OUTPUT: solusi pendekatan  $p$  atau pesan gagal.
- Langkah-1 Tentukan  $i = 1$ ;  
 $F A = f(a)$ ,  $F B = f(b)$ , pastikan  $F A \cdot F B < 0$
- Langkah-2 While  $i \leq N$  lakukan Langkah 3 sampai Langkah 6
- Langkah-3 Tentukan  $c = a + (b - a)/2$  dan  $F P = f(c)$
- Langkah-4 If  $F P = 0$  atau  $(b - a)/2 < TOL$  then  
OUTPUT( $p$ ). (Proses pencarian telah selesai dan ditemukan)  
STOP.
- Langkah-5 Tentukan  $i = i + 1$ .
- Langkah-6 If  $F A \cdot F P > 0$  then tentukan  $a = c$  else  
tentukan  $b = p$
- Langkah-7 OUTPUT ('Metode GAGAL setelah melalui iterasi  $i = N0$ )  
(Proses telah selesai tetapi tidak ditemukan) STOP.

## Grafik Metode Biseksi



## **Kelebihan Metode Biseksi**

- ↳ Selalu berhasil menemukan akar (solusi) yang dicari, atau dengan kata lain selalu konvergen.

## **Kekurangan Metode Biseksi**

- ↳ Metode biseksi hanya dapat dilakukan apabila ada akar persamaan pada interval yang diberikan.
- ↳ Jika ada beberapa akar pada interval yang diberikan maka hanya satu akar saja yang dapat ditemukan.
- ↳ Memiliki proses iterasi yang banyak sehingga memperlama proses penyelesaian. Tidak memandang bahwa sebenarnya akar atau solusi yang dicari dekat sekali dengan batas interval yang digunakan.

### Contoh:

Tentukan solusi dari persamaan non-linier:

$$y = x^3 - 7x + 1$$

dengan error 0.005. gunakan  $x_n = 2.5$  dan  $x_{n+1} = 2.6$ .

Hitung nilai  $f(x_n), f(x_{n+1}), x_{mid} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$  dan  $f(x_{mid})$ .

### Tabel 1

| No | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $f(x_n)$ | $f(x_{n+1})$ | $x_{\text{mid}}$ | $f(x_{\text{mid}})$ |
|----|-------|-----------|----------|--------------|------------------|---------------------|
| 1. | 2.5   | 2.6       | -0.875   | 0.376        | 2.55             | -0.269              |

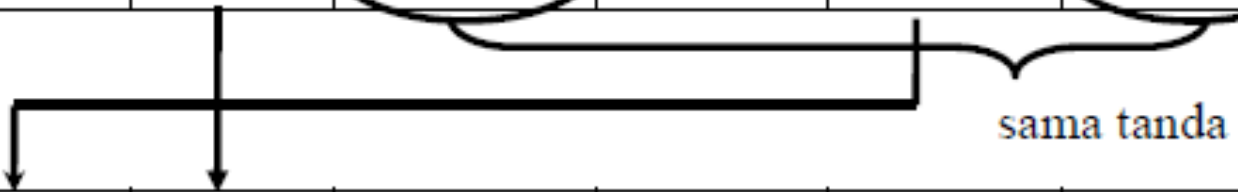
$f(x) = x^3 - 7x + 1$   
 $f(x_n) = f(2.5) = (2.5)^3 - 7(2.5) + 1 = -0.875$   
 $f(x_{n+1}) = f(2.6) = (2.6)^3 - 7(2.6) + 1 = 0.376$   
 $x_{\text{mid}} = \frac{2.5 + 2.6}{2} = 2.55$   
 $f(x_{\text{mid}}) = f(2.55) = (2.55)^3 - 7(2.55) + 1 = -0.269$

Apakah  $f(x_n)$  dan  $f(x_{\text{mid}})$  sama tanda? Jika

sama tanda maka  $x_{\text{mid}}$  menggantikan  $x_n$ , sedangkan jika berbeda tanda maka  $x_{\text{mid}}$  menggantikan  $x_{n+1}$ .

Terlihat dari tabel 1,  $f(x_n) = -0.875$  dan  $f(x_{\text{mid}}) = -0.269$  sama tanda, maka  $x_{\text{mid}} = 2.55$  menggantikan  $x_n = 2.5$ .

**Tabel 2**

| No                                                                                   | $x_n$          | $x_{n+1}$ | $f(x_n)$ | $f(x_{n+1})$ | $x_{\text{mid}}$ | $f(x_{\text{mid}})$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------|----------|--------------|------------------|---------------------|
| 1.                                                                                   | <del>2.5</del> | 2.6       | -0.875   | 0.376        | 2.55             | -0.269              |
|  |                |           |          |              |                  |                     |
| 2.                                                                                   | 2.55           | 2.6       | -0.269   | 0.376        |                  |                     |

Apakah  $|f(x_{\text{mid}})| \leq 0.005$ ? Jika ya, maka  $x_{\text{mid}} =$

2.55 merupakan solusi dari persamaan non linier tersebut, jika tidak, ulangi *langkah 2* dengan  $x_n = 2.55$  dan  $x_{n+1} = 2.6$ .

Dikarenakan  $|f(x_{\text{mid}})| = 0.269 > 0.005$  maka ulangi langkah 2 sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

| No         | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $f(x_n)$ | $f(x_{n+1})$ | $x_{mid}$    | $f(x_{mid})$ |
|------------|-------|-----------|----------|--------------|--------------|--------------|
| 1.         | 2.5   | 2.6       | -0.875   | 0.376        | 2.55         | -0.269       |
| sama tanda |       |           |          |              |              |              |
| 2.         | 2.55  | 2.6       | -0.269   | 0.376        | 2.575        | 0.049        |
| beda tanda |       |           |          |              |              |              |
| 3.         | 2.55  | 2.575     | -0.269   | 0.049        | 2.562        | -0.117       |
| sama tanda |       |           |          |              |              |              |
| 4.         | 2.562 | 2.575     | -0.117   | 0.049        | 2.568        | -0.041       |
| sama tanda |       |           |          |              |              |              |
| 5.         | 2.568 | 2.575     | -0.041   | 0.049        | 2.572        | 0.010        |
| beda tanda |       |           |          |              |              |              |
| 6.         | 2.568 | 2.572     | -0.041   | 0.010        | 2.570        | -0.015       |
| sama tanda |       |           |          |              |              |              |
| 7.         | 2.570 | 2.572     | -0.041   | 0.010        | <u>2.571</u> | -0.003       |

$$|f(x_{mid})| = 0.269 > 0.005$$

$$|f(x_{mid})| = 0.049 > 0.005$$

$$|f(x_{mid})| = 0.117 > 0.005$$

$$|f(x_{mid})| = 0.041 > 0.005$$

$$|f(x_{mid})| = 0.010 > 0.005$$

$$|f(x_{mid})| = 0.015 > 0.005$$

$|f(x_{mid})| = 0.003 \leq 0.005$  maka iterasi dihentikan dan diperoleh solusi persamaan non linier yang diinginkan yaitu  $x = 2.571$ .

- Catatan :

Dengan menggunakan metode biseksi dengan toleransi error 0.001 dibutuhkan beberapa iterasi, semakin teliti (kecil toleransi errornya) maka semakin besar jumlah iterasi yang dibutuhkan.

# Tugas

1. Cari Akar  $f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$  dalam selang  $[3, 6]$   
dengan error = 0.0005 dengan metode  
bisection
2. Dengan menggunakan metode bisection,  
tentukan salah satu akar dari  
 $f(x) = -2x^5 - 1,6x^3 + 12x + 1 = 0$  dalam selang  $[1, 2]$   
dengan error = 0,0001