Aljabar Linear Elementer
MA1223
3 SKS

Silabus :

Beberapa Aplikasi Ruang Eigen

- **Uji Kestabilan dalam sistem dinamik**
- **Optimasi dengan SVD pada pengolahan Citra**
- **Sistem Transmisi**
- **dan lain-lain.**

Definisi :

Misalkan A_{nxn} matriks matriks bujur sangkar
$\overline{v}$ adalah <u>vektor tak nol</u> di R^n dan λ adalah skalar Rill sehingga memenuhi :

$$A\overline{v} = \lambda \overline{v}$$

maka λ dinamakan nilai eigen dari A,
sedangkan $\overline{v}$ dinamakan vektor eigen dari A

Contoh :

Nilai eigen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektor eigen

Perhatikan !!!

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$$

$$A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \bar{0}$$

$$A\bar{v} - \lambda I\,\bar{v} = \bar{0}$$

$$\left(A - \lambda I\right)\bar{v} = \bar{0}$$

Ingat....

$\bar{v}$ **merupakan vektor tak nol**

Persamaan Karakteristik

Ini Berarti

$$\det\left(A - \lambda I\right) = 0$$

Contoh :

Tentukan nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan Karakteristik *det* (A – λI) = 0

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- Dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-2

$$(1-\lambda)\ (\ (1-\lambda)\ (-\lambda)\ \ -2\ ) = 0$$

$$(1-\lambda)\ (\ \lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$(1-\lambda)\ (\ \lambda - 2)\ (\ \lambda + 1) = 0$$

Jadi, matriks A memiliki tiga buah nilai eigen yaitu :

$\lambda = -1$, $\lambda = 1$, dan $\lambda = 2$.

Contoh :

Tentukan basis ruang eigen dari :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Nilai eigen dari A diperoleh saat $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \quad (\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow \quad (\lambda - 2)\{(\lambda - 2)^2 - 1\} + (-\lambda + 1) - (1 + (\lambda - 2)) = 0$

$\rightarrow \quad (\lambda - 2)\{\lambda^2 - 4\lambda + 3\} - (\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0$

$\rightarrow \quad (\lambda - 2)\{(\lambda - 3)(\lambda - 1)\} - 2(\lambda - 1) = 0$

$\rightarrow \quad (\lambda - 1)((\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2) = 0$

$\rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$

$\rightarrow \quad (\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0$

Nilai Eigen dari matriks tersebut adalah 1 dan 4.

- **Untuk λ = 1**

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

maka

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

dimana s, t adalah parameter

Jadi Basis ruang eigen yang bersesuaian dengan λ=1 adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ingat bahwa…

Vektor eigen merupakan kelipatan dari unsur basis tersebut

- **Untuk λ = 4**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

maka

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan λ=4 adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Diagonalisasi

Definisi : Suatu matriks persegi Anxn dikatakan

dapat didiagonalkan (diagonalizable)

jika terdapat matriks P yang mempunyai invers

(Jadi kolom-kolomnya harus bebas linier)

sehingga $\mathbf{P^{-1}AP}$ merupakan matriks diagonal.

Matriks P dinamakan matriks yang mendiagonalkan (pendiagonal) dari A.

Vektor-vektor kolom dari matriks P adalah vektor-vektor eigen dari A.

Contoh :

Tentukan matriks yang mendiagonalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah :

$$|\lambda.I - A| = 0$$

atau

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & -1 \\ 0 & -1 & (\lambda-1) \end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor :
Pilih Baris I

$$\det\{\lambda.I - A\} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

$$= (\lambda-1)\,(\lambda)\,(\lambda-2) + 0 + 0$$

$$= (\lambda-1)\,(\lambda)\,(\lambda-2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0 \;\; ; \; \lambda = 1 \;\; ; \; \lambda = 2$$

Untuk $\lambda = 0$

Dengan OBE maka

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

, dimana t adalah parameter tak nol

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah

$$\overline{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

Dengan OBE maka

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t$$, dimana t adalah parameter tak nol

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$\overline{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$

Dengan OBE maka

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$, dimana t adalah parameter tak nol

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah

$$\overline{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perhatikan

$$k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3 = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3\}$

merupakan himpunan yang bebas linear

Jadi, Matriks yang mendiagonalkan A adalah :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks diagonal yang dihasilkan adalah : $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Hal yang perlu diperhatikan, matriks $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Juga mendiagonalkan A.

Tapi matriks diagonal yang terbentuk adalah :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bnxn dikatakan matriks ortogonal **jika $B^{-1} = B^t$**

Pernyataan berikut adalah ekivalen :

- Bnxn adalah matriks ortogonal.
- Vektor-vektor baris dari B membentuk himpunan ortonormal di R^n dalam RHD Euclides.
- Vektor-vektor kolom dari B membentuk himpunan ortonormal di R^n dalam RHD Euclides.

Misalkan P merupakan matriks ortogonal maka berlaku :

- $P^t P = I$
- $\| Px \| = \| x \|$, untuk setiap x di R^n

Contoh :

Berikut adalah contoh matriks ortogonal :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa setiap vektor baris/kolom merupakan vektor satuan
Dan HkD antar vektor tersebut adalah nol

Perhatikan bahwa :

$$A^t A = I_{2x2} \quad \text{dan} \quad B^t B = I_{3x3}$$

Sementara itu,

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{14}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{196}{2} + \frac{4}{2}}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|$$

Definisi :

Suatu matriks Anxn dikatakan dapat didiagonalkan secara ortogonal

jika terdapat **matriks ortogonal** P

sedemikian hingga

$\mathbf{P^{-1}AP}$ (=$\mathbf{P^{t}AP}$) merupakan matriks diagonal.

Perhatikan bahwa :

$D = P^{-1}AP$ atau $A = PDP^{-1}$

Misalkan P merupakan matriks ortogonal, maka

$A = PDP^t$

Sehingga diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} A^t &= (PDP^t)^t \\ &= (P^t)^t D^t P^t \\ &= PDP^t \\ &= A \end{aligned}$$

A dapat didiagonalkan secara ortogonal

jika dan hanya jika A matriks simetri

Misal Anxn, cara menentukan matriks ortogonal P yang mendiagonalkan A :

- Tentukan nilai eigen
- Tentukan basis ruang eigen untuk setiap nilai eigen yang diperoleh
- Ubah **setiap** basis pada (b) menjadi basis ruang eigen yang ortonormal.
- Bentuk matriks P dimana vektor-vektor kolomnya berupa basis ruang eigen yang ortonormal.

Contoh :

Tentukan matriks yang mendiagonalkan secara ortogonal matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Basis ruang eigen :

- Untuk $\lambda = 0$ adalah

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$$

- Untuk $\lambda = 1$ adalah

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

- Untuk $\lambda = 2$ adalah

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$$

Dengan demikian, secara berurutan basis ruang eigen yang ortonormal matriks tersebut

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ dan } \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$$

Sehingga matriks ortogonal yang mendiagonalkan A adalah :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ingat Kembali Pers. Diferensial

$$\frac{dy(t)}{dt} = a\,y(t) \quad \Longrightarrow \quad y(t) = ce^{at}$$

Misalkan sekumpulan PD orde 1 ditulis :

$$\begin{aligned} \frac{dr_1(t)}{dt} &= 2r_1(t) \\ \frac{dr_2(t)}{dt} &= -3r_2(t) \\ \frac{dr_3(t)}{dt} &= r_3(t) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Solusi sistem PD tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{-3t} \\ c_3e^{t} \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan diferensial **tidak selalu** memberikan matriks koefisien yang berbentuk matriks diagonal.

Bentuk Umum SPD orde 1 :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Langkah-langkah menyelesaikan SPD orde 1 linear :

- Menentukan matriks P yang mendiagonalkan A.
- Tulis SPD *dummy* dalam bentuk $U' = DU$ dimana $D = P^{-1}AP$
- Tentukan solusi SPD *dummy* $U' = DU$
- Solusi SPD adalah $X = PU$

Contoh 6 :

Tentukan solusi dari sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

Jawab :

Tulis SPD dalam bentuk :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dengan PK

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nilai eigen dari matriks koefisien, $\lambda = 2$ dan $\lambda = 3$

- BRE yang bersesuaian dengan λ = 3 $\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- BRE yang bersesuaian dengan λ = 2 $\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Sehingga diperoleh $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Karena $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

maka SPD dummy berbentuk :

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Solusi SPD dummy adalah

$$u_1 = c_1 e^{3t} \quad \text{dan} \quad u_2 = c_2 e^{2t}$$

Solusi dari SPD

$$X = PU \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

atau

$$x_1 = 2c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

$$x_2 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

Contoh 8.9 :

Tentukan solusi dari masalah nilai awal

$$\frac{dp}{dt} = 2p(t) + q(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = p(t) + 2q(t)$$

dengan kondisi awal

$$p(0) = 1 \text{ dan } \qquad q(0) = 3$$

Jawab :

Kita peroleh $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Persamaan Karakteristiknya adalah

$$det\ \{\lambda.I - A\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ -1 & (\lambda - 2) \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

diperoleh $\lambda = 1\ ;\ \lambda = 3$

Untuk $\lambda = 1$

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 = -x_2$$
$$x_2 = t$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$

adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$, dimana t merupakan parameter.

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$

adalah

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 3$

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0$$
$$x_1 = x_2$$
$$x_2 = t$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t,$$ dimana t merupakan parameter

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga Solusi Umum SPD U' = D U adalah

$$U = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Dengan demikian solusi SPD kita adalah :

$$X = PU$$

atau

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

sehingga

$$p = -c_1 e^{t} + c_2 e^{3t}$$

$$q = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t}$$

Untuk $t = 0 \Rightarrow p(0) = 1$ dan $q(0) = 3$ sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 + C_2 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix}$$

Dengan Eliminasi didapat $C_1 = 1$; $C_2 = 2$

Jadi solusi masalah nilai awal tersebut adalah

$$p(t) = 2e^{3t} - e^{t}$$

$$q(t) = 2e^{3t} + e^{t}$$

Latihan Bab 8

1. Tentukan basis ruang eigen dari $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Diketahui : $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

   Apakah B matriks dapat didiagonalkan? Jelaskan!

3. Suatu Matriks A_{2x2} memiliki basis ruang eigen :

- $\lambda = -3 \Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
- $\lambda = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

   Tentukan matriks A !

4. Tentukan solusi dari masalah nilai awal :

$$\frac{dp}{dt} = p(t) + 3q(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = 4p(t) + 5q(t)$$

dengan kondisi awal

$$p(0) = 2 \quad \text{dan} \quad q'(0) = 1$$