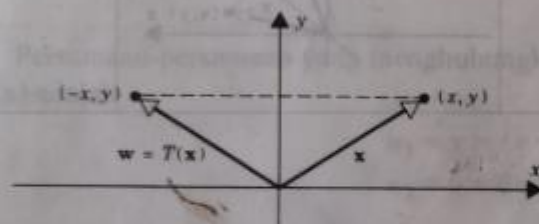


Operasi-operasi linear yang paling penting pada R^2 dan R^3 di antaranya adalah operasi-operasi yang menghasilkan pencerminan, proyeksi, dan rotasi. Sekarang kita akan mendiskusikan operator-operator tersebut.

Tinjau operator $T: R^2 \rightarrow R^2$ yang memetakan setiap vektor ke bayangan simetrisnya terhadap sumbu- y (Gambar 2).

Jika kita anggap $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$, maka persamaan yang menghubungkan komponen-komponen $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{w}$ adalah

$$\begin{aligned} w_1 &= -x = -x + 0y \\ w_2 &= y = 0x + y \end{aligned} \quad (10)$$



atau dalam bentuk matriks,

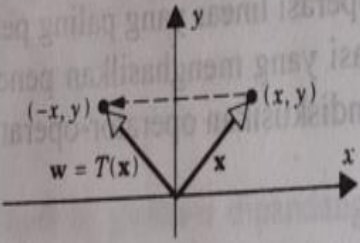
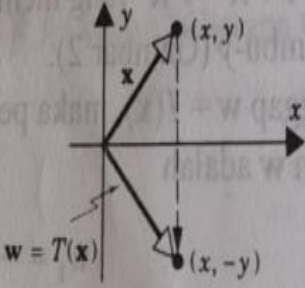
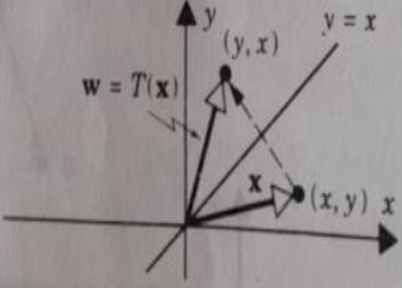
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (11)$$

Karena persamaan dalam (10) adalah linear, maka T adalah suatu operator linear dan dari (11) matriks standar untuk T adalah

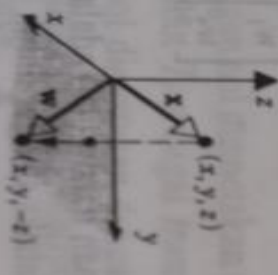
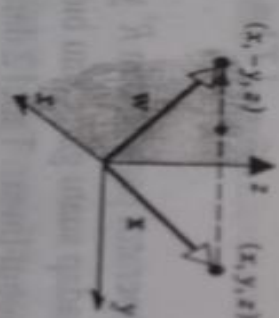
$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

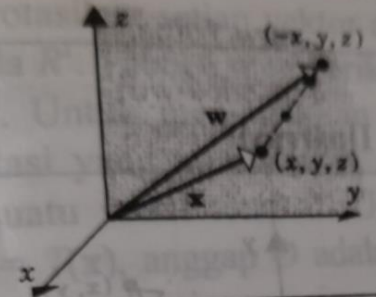
Secara umum, operator pada R^2 dan R^3 yang memetakan setiap vektor ke bayangan simetrisnya terhadap suatu garis atau bidang disebut *operator pencerminan*. Operator-operator tersebut linear. Tabel 2 dan 3 mendaftarkan beberapa operator pencerminan yang umum.

TABEL 2

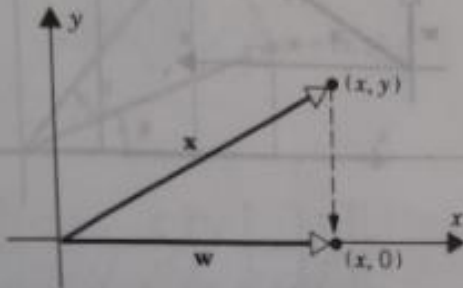
Operator	Ilustrasi	Persamaan	Matriks Standar
Pencerminan terhadap sumbu-y		$w_1 = -x$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Pencerminan terhadap sumbu-x		$w_1 = x$ $w_2 = -y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Pencerminan terhadap garis $y = x$		$w_1 = y$ $w_2 = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

TABEL 3

Operator	Ilustrasi	Persamaan	Matrks Standar
Pencerminan terhadap bidang-xy		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = -z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Pencerminan terhadap bidang-xz		$w_1 = x$ $w_2 = -y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Pencerminan terhadap bidang-yz		$w_1 = -x$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
--------------------------------	---	--------------------------------------	--

Tinjau operator $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yang memetakan setiap vektor ke proyeksi ortogonalnya pada sumbu- x (Gambar 3).



Persamaan-persamaan yang menghubungkan komponen-komponen x dan $w = T(x)$ adalah

$$\begin{aligned} w_1 &= x = x + 0y \\ w_2 &= 0 = 0x + 0y \end{aligned} \quad (12)$$

atau dalam bentuk matriks,

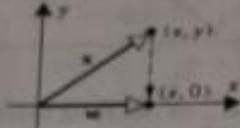
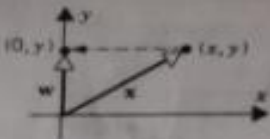
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (13)$$

Persamaan dalam (12) adalah linear, jadi T adalah suatu operator linear dan dari (13) matriks standar untuk T adalah

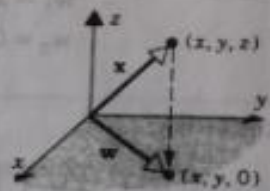
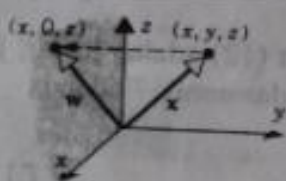
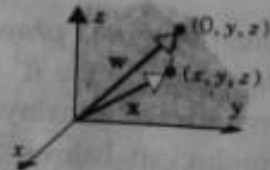
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

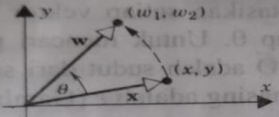
Secara umum, sebuah *operator proyeksi* (atau lebih tepatnya sebuah *operator proyeksi ortogonal*) pada $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$ adalah sebarang operator yang memetakan setiap vektor ke proyeksi ortogonalnya pada suatu garis atau bidang yang melalui titik asal. Bisa ditunjukkan bahwa operator-operator seperti itu adalah linear. Beberapa operator proyeksi dasar pada $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ didaftarkan pada Tabel 4 dan 5.

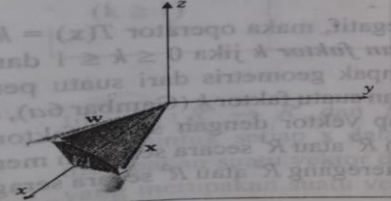
TABEL 4

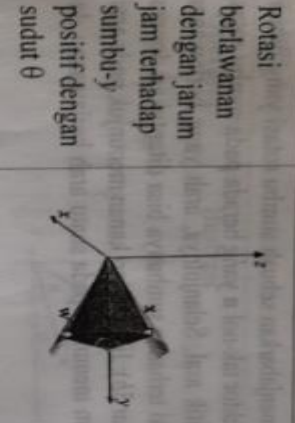
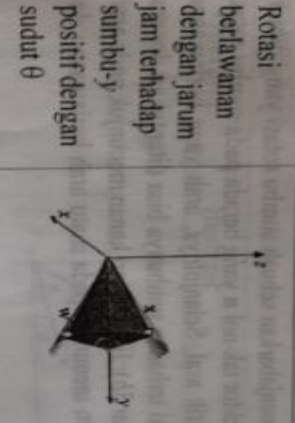
Operator	Ilustrasi	Persamaan	Matriks Standar
Proyeksi ortogonal pada sumbu-x		$w_1 = x$ $w_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Proyeksi ortogonal pada sumbu-y		$w_1 = 0$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

TABEL 5

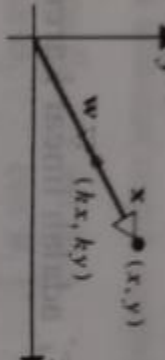
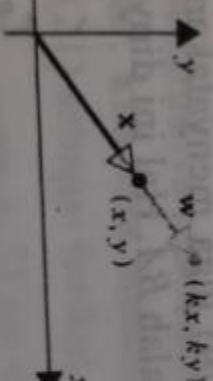
Operator	Ilustrasi	Persamaan	Matriks Standar
Proyeksi ortogonal pada bidang-xy		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Proyeksi ortogonal pada bidang-xz		$w_1 = x$ $w_2 = 0$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Proyeksi ortogonal pada bidang-yz		$w_1 = 0$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operator	Ilustrasi	Persamaan	Matriks Standar
Rotasi dengan sudut θ		$w_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$ $w_2 = x \sin \theta + y \cos \theta$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

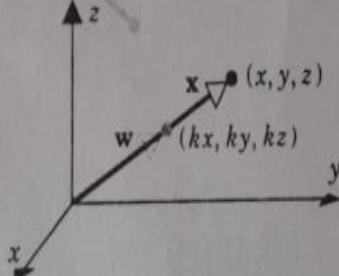
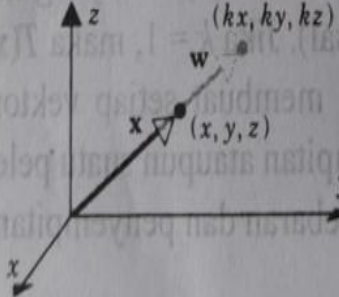
Operator	Ilustrasi	Persamaan	Matriks Standar
Rotasi berlawanan dengan jarum jam terhadap sumbu-x positif dengan sudut θ		$w_1 = x$ $w_2 = y \cos \theta - z \sin \theta$ $w_3 = y \sin \theta + z \cos \theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Rotasi berlawanan dengan jarum jam terhadap sumbu-z positif dengan sudut θ		$w_1 = x \cos \theta + z \sin \theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x \sin \theta + z \cos \theta$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$
Rotasi berlawanan dengan jarum jam terhadap sumbu-y positif dengan sudut θ		$w_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$ $w_2 = x \sin \theta + y \cos \theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

TABEL 8

Operator	Ilustrasi	Persamaan	Matriks Standar
Penyempitan dengan faktor k pada R^2 $(0 \leq k \leq 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Pelebaran dengan faktor k pada R^2 $(k \geq 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	

TABEL 9

Operator	Ilustrasi	Persamaan	Matriks Standar
Penyempitan dengan faktor k pada R^3 ($0 \leq k \leq 1$)		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
Pelebaran dengan faktor k pada R^3 ($k \geq 1$)		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	