



ALJABAR LINIER & MATRIKS

■ Dr.Ir KARTINI S.Kom M.T



MATERI 9 . VEKTOR

Vektor Dimensi 2 dan Dimensi 3



Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- Mengetahui definisi Vektor Dimensi 2 dan 3
- Dapat menghitung perkalian dan jarak antara 2 vektor

Mahasiswa dapat

- menjelaskan pengertian vektor.
- Menemukan hasil dari suatu operasi yang dilakukan terhadap dua vektor atau lebih.
- Menjelaskan pengertian vektor dalam ruang berdimensi satu, dua, tiga dan n ..

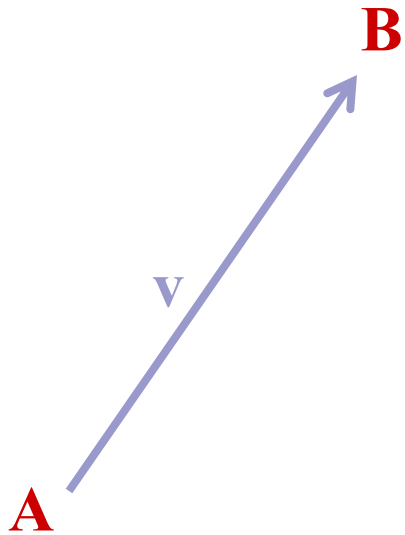
Mahasiswa dapat

- mengerti& menghitung perkalian titik(dot), perkalian silang (cross).
- Vektor- vector Ortogonal
- Menyatakan suatu vector dalam ruang berdimensi



Vektor di Ruang-2

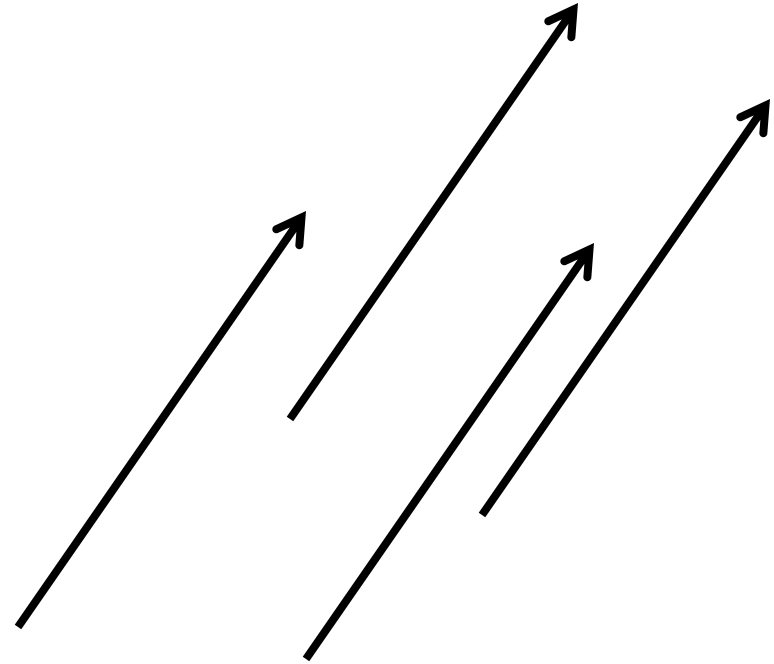
Vektor di Ruang-3



vektor $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$

A disebut titik awal/inisial

B disebut titik akhir/terminal

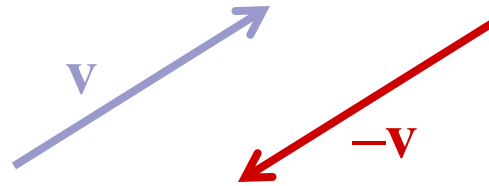


Vektor-vektor ekivalen

Dianggap sama

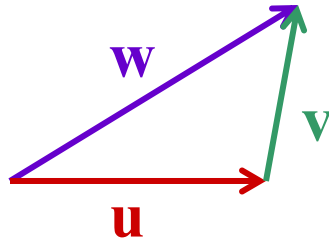
Panjang dan arahnya sama

Negasi sebuah vektor $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ secara geometrik

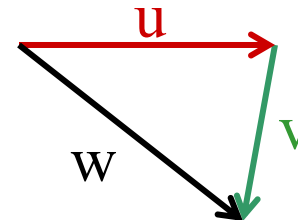
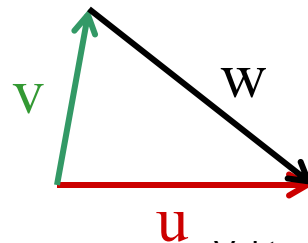


Panjang sama, arah berlawanan

Penjumlahan dua vektor: $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ secara geometrik

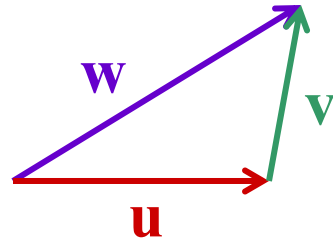


Selisih dua vektor: $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ sama dengan $\mathbf{w} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$



Vektor Dimensi 2 dan Dimensi 3

Penjumlahan dua vektor: $w = u + v$



Cara analitik:

Vektor-vektor u , v , w di Ruang-2 atau Ruang-3

Ruang-2: $u = (u_1, u_2)$; $v = (v_1, v_2)$; $w = (w_1, w_2)$

$$w = (w_1, w_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$$

$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

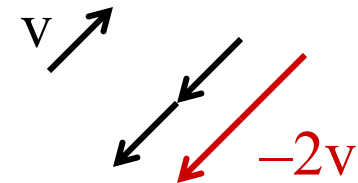
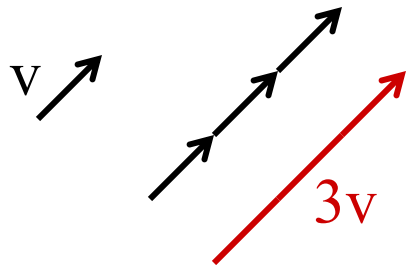
$$w_1 = u_1 + v_1$$

$$w_2 = u_2 + v_2$$

Perkalian vektor dengan **skalar** (*bilangan nyata/real number*)

$$w = k v ; k = \text{skalar}$$

secara geometrik:



Perkalian vektor dengan **skalar** (*bilangan nyata/real number*)

$$\mathbf{w} = k \mathbf{v} ; k = \text{skalar}$$

Cara analitik:

Di Ruang-2: $\mathbf{w} = k\mathbf{v} = (k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2)$

$$(w_1, w_2) = (k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2)$$

$$w_1 = k\mathbf{v}_1$$

$$w_2 = k\mathbf{v}_2$$

Koordinat Cartesius:

$$P_1 = (x_1, y_1) \text{ dan } P_2 = (x_2, y_2)$$

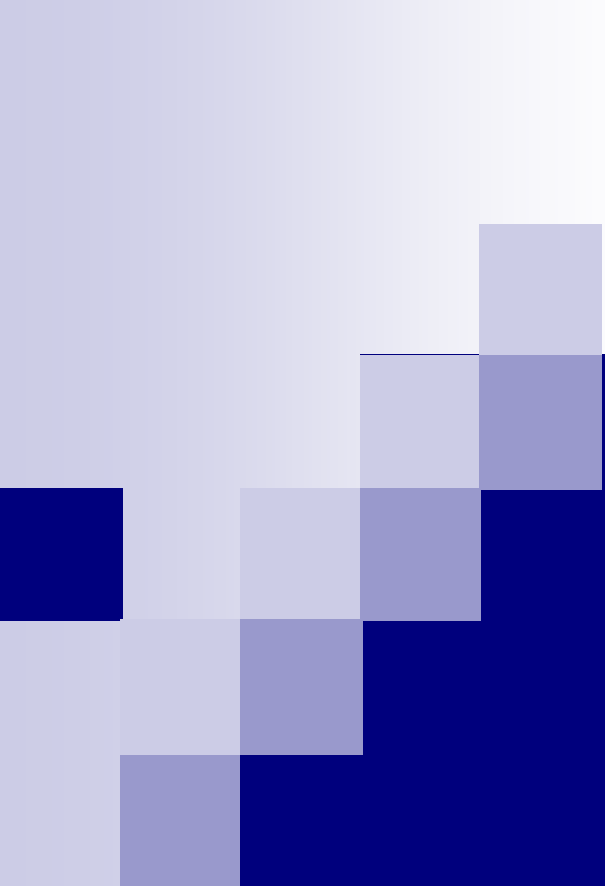
P_1 dapat dianggap sebagai titik dengan koordinat (x_1, y_1)

atau sebagai vektor OP_1 di Ruang-2 dengan komponen pertama x_1 dan komponen kedua y_1

P_2 dapat dianggap sebagai titik dengan koordinat (x_2, y_2)

atau sebagai vektor OP_2 di Ruang-2 dengan komponen pertama x_2 dan komponen kedua y_2

$$\text{Vektor } P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

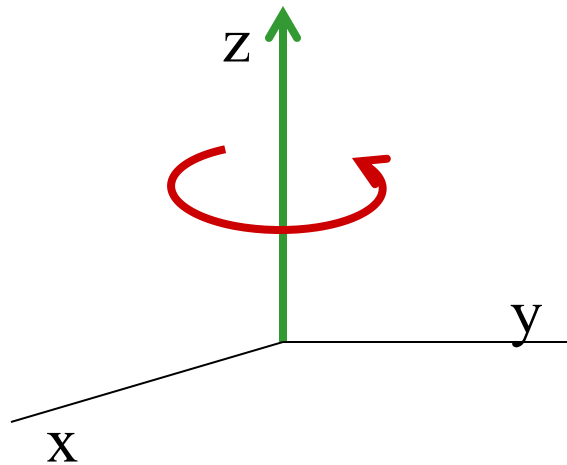


TUGAS

Gambarkan secara geometri
vector pada slide 10

Vektor-vektor di ruang-3

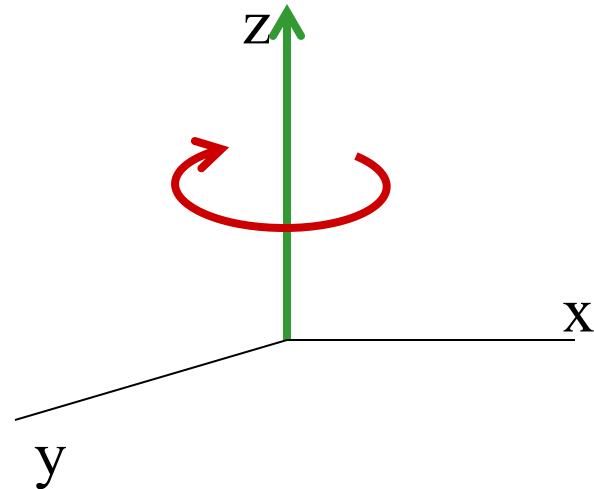
Aturan tangan kanan



x : 4 jari

y : telapak tangan

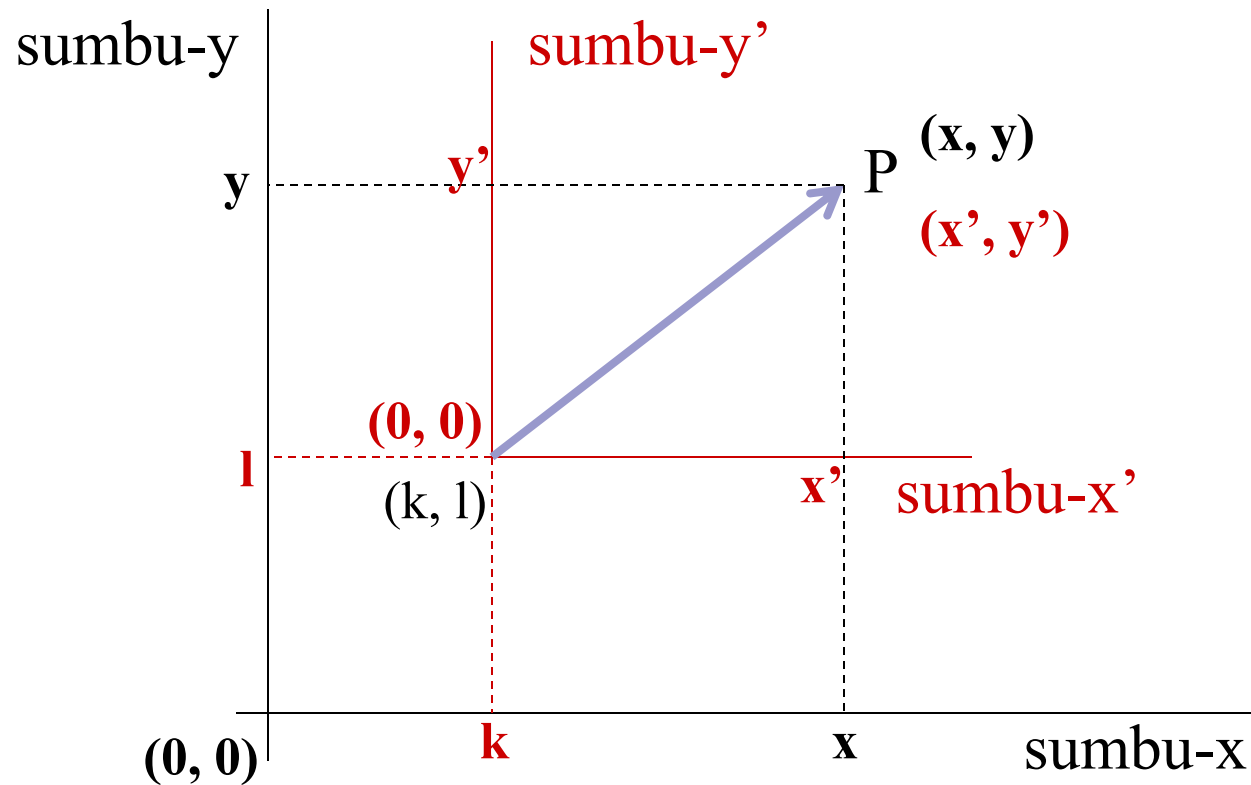
Aturan tangan-kiri



z : ibu jari

Lihat bab 3.1. Gambar 11

Translasi



$$x' = x - k \quad y' = y - l$$



Bab 3.2

Aritmatika vektor

Norma sebuah vektor

Aritmatika vektor di Ruang-2 dan Ruang-3

Teorema 3.2.1.: u, v, w vektor-vektor di Ruang-2/Ruang-3

k, l adalah skalar (bilangan *real*)

- $u+v = v+u$
- $(u+v)+w = u+(v+w)$
- $u+0 = 0+u = u$
- $u+(-u) = (-u)+u = 0$
- $k(lu) = (kl)u$
- $k(u+v) = ku + kv$
- $(k+l)u = ku + lu$
- $1u = u$

Bukti teorema 3.2.1.:

1. Secara geometrik (digambarkan)
2. Secara analitik (dijabarkan)

Bukti secara analitik untuk teorema 3.2.1. di Ruang-3

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3); \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3); \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{0} &= (u_1, u_2, u_3) + (0, 0, 0) \\ &= (u_1 + 0, u_2 + 0, u_3 + 0) \\ &= (0 + u_1, 0 + u_2, 0 + u_3) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{u} \\ &= (u_1, u_2, u_3) \\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k(l\mathbf{u}) &= k(lu_1, lu_2, lu_3) \\
 &= (klu_1, klu_2, klu_3) \\
 &= kl(u_1, u_2, u_3) \\
 &= kl\mathbf{u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)) \\
 &= k(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\
 &= (ku_1 + kv_1, ku_2 + kv_2, ku_3 + kv_3) \\
 &= (ku_1, ku_2, ku_3) + (kv_1, kv_2, kv_3) \\
 &= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (k + l)\mathbf{u} &= ((k+l)u_1, (k+l)u_2, (k+l)u_3) \\
 &= (ku_1, ku_2, ku_3) + (lu_1, lu_2, lu_3) \\
 &= k(u_1, u_2, u_3) + l(u_1, u_2, u_3) \\
 &= k\mathbf{u} + l\mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Norma sebuah vektor:

(Untuk sementara norma bisa dianggap sebagai panjang vektor)

Ruang-2 : norma vektor $\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Ruang-3 : norma vektor $\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Vektor Satuan (*unit Vector*) : suatu vektor dengan norma 1

Jarak antara dua titik:

Ruang-2: vektor $\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

jarak antara $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

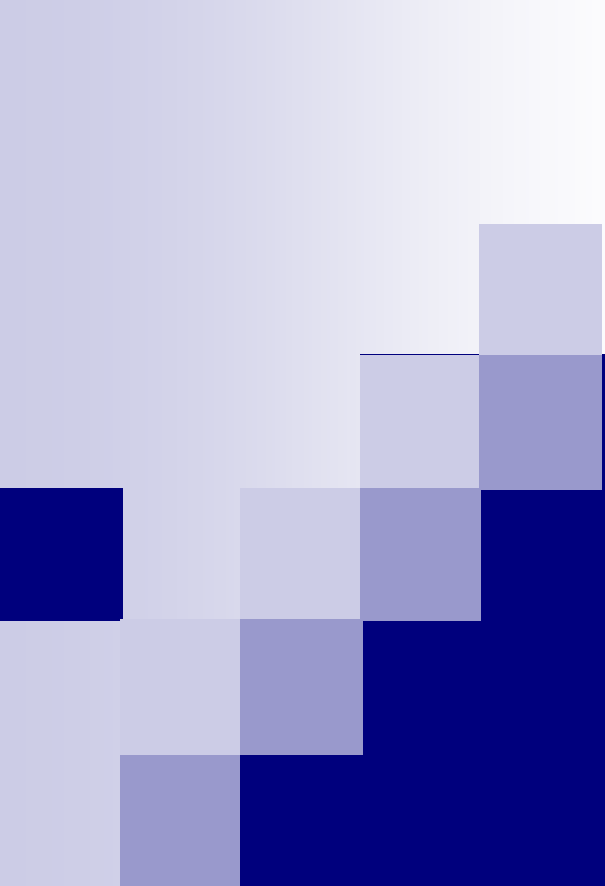
Ruang-3: vektor $\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

jarak antara $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2) =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Jika $\mathbf{u}$ adalah vektor dan k adalah skalar, maka

$$\text{norma } k\mathbf{u} = |k| \|\mathbf{u}\|$$



Contoh soal latihan

Kerjakan sebagai latihan

Contoh(1):

Cari norma dari $v = (0,6,0)$

Contoh(2):

Anggap $v = (-1,2,5)$. Carilah semua skalar k sehingga norma $kv = 4$



Contoh(3):

Carilah jarak antara

- a. $P1 = (3,4)$ dan $P2 = (5,7)$
- b. $P1 = (3,3,3)$ dan $P2 = (6,0,3)$

Contoh(4):

- a. Jika v adalah vektor tak nol, maka tunjukkan bahwa $\frac{1}{\|v\|} v$ merupakan vektor satuan
- b. Gunakan penyelesaian dari a untuk menemukan vektor satuan yang mempunyai arah sama dengan $v = (3,4)$
- c. Gunakan penyelesaian dari a untuk menemukan vektor satuan yang mempunyai arah berlawanan dengan $v = (-2,3,-6)$

Contoh(5):

Misalkan $u = (2,-2,3)$, $v = (1,-3,4)$, $w = (3,6,-4)$. Tentukan hasil dari :

- a. $\|u + v\|$
- b. $\frac{1}{\|w\|} w$
- c. $\|-2u\| + 2\|u\|$
- d. $\left\| \frac{1}{\|w\|} w \right\|$