

SPL

1. Persamaan Linier Satu Variabel

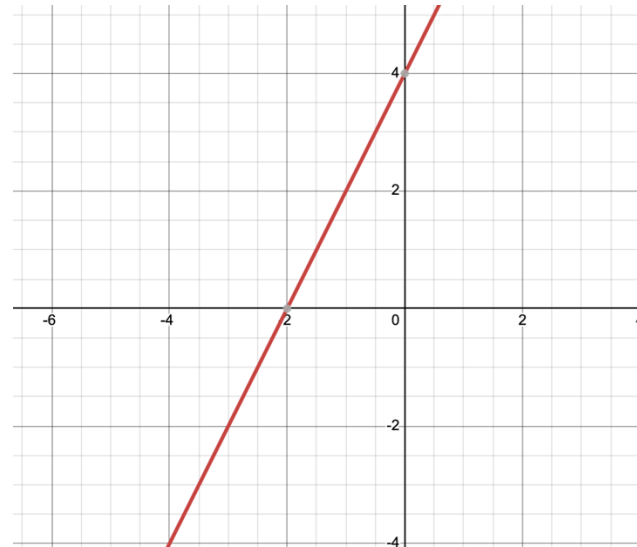
- Bentuk umum:

$$ax + b = 0$$

- Gunakan **operasi aljabar biasa** untuk mencari nilai variabelnya.

Contoh: $2x + 4 = 0$

$$x = -2$$



2. Persamaan Linier Dua Variabel

- Bentuk umum:

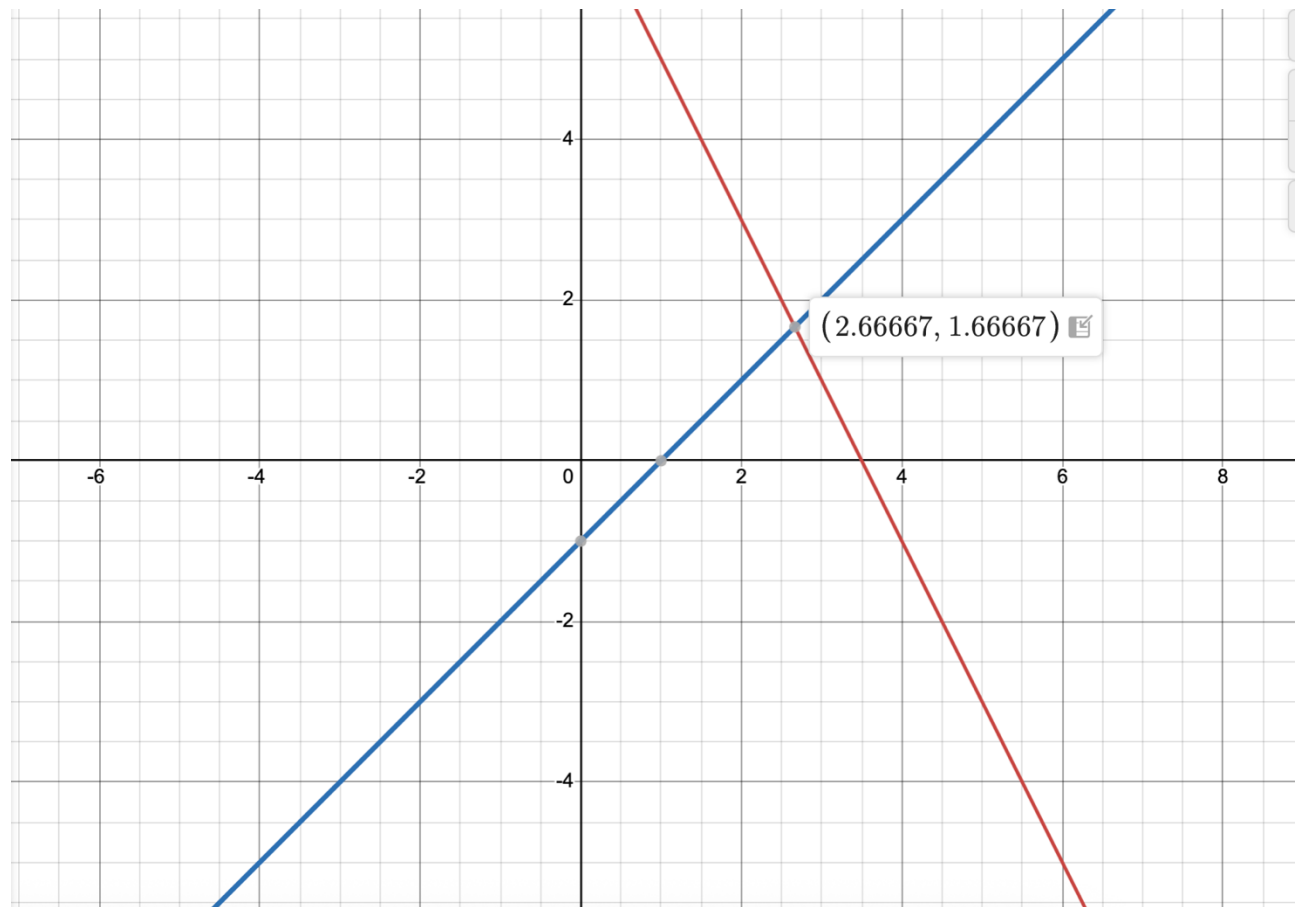
$$ax + by = c$$

- Biasanya diselesaikan dalam bentuk sistem persamaan (dua persamaan, dua variabel).
- Contoh:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

- Ada tiga metode utama:
 1. Metode Substitusi
 2. Metode Eliminasi

$x=8/3$ dan $y=5/3$ atau $x = 2.67, y = 1.67$



3. Persamaan Linier Tiga Variabel

- Bentuk umum:

$$ax + by + cz = d$$

- Biasanya digunakan sistem tiga persamaan dengan tiga variabel.

Dapat diselesaikan dengan:

1. Substitusi
2. Eliminasi
3. Metode matriks (Gauss / Gauss-Jordan)

4. Persamaan Linier lebih dari Tiga Variabel

- Untuk sistem yang sangat besar (misalnya puluhan atau ratusan variabel), digunakan metode numerik seperti:
 1. Metode Gauss-Seidel
 2. Metode Jacobi
 3. Atau dengan software seperti MATLAB, Octave, Python (NumPy), R, dll.

PENYAJIAN SPL DALAM MATRIKS

SPL

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

BENTUK MATRIKS

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

ELIMINASI GAUSS

Eliminasi Gauss adalah cara mengoperasikan nilai-nilai matriks menjadi lebih sederhana dengan melakukan operasi baris sehingga matriks tersebut menjadi eselon baris.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Eliminasi gauss-Jordan adalah versi lain dari metode gauss, bedanya hasil dari gauss-Jordan adalah matriks tereduksi yang berupa matriks diagonal satu

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array} \right]$$

TIGA OPERASI YANG MEMPERTAHANKAN PENYELESAIAN SPL

SPL

1. Mengalikan suatu persamaan dengan konstanta tak nol.
2. Menukar posisi dua persamaan sebarang.
3. Menambahkan atau mengurangi suatu persamaan ke persamaan lainnya.

MATRIKS

1. Mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol.
2. Menukar posisi dua baris sebarang.
3. Menambahkan atau mengurangi suatu baris ke baris lainnya.

Ketiga operasi ini disebut OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

CONTOH

DIKETAHUI

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots(i) \\ \dots\dots\dots(ii) \\ \dots\dots\dots(iii) \end{matrix}$$



kalikan pers (i)
dengan (-2), kemu-
dian tambahkan ke
pers (ii).

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(ii) = -2(i) + (ii)$$



kalikan pers (i)
dengan (-3), kemu-
dian tambahkan ke
pers (iii).

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3y - 11z = -27 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$(iii) = -3(i) + (iii)$$



kalikan pers (ii)
dengan (1/2).

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ 3y - 11z = -27 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$(ii) = \frac{1}{2} * (ii)$$

CONTOH

kalikan pers (ii)
dengan $(1/2)$.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$(ii) = \frac{1}{2} * (ii)$$

kalikan pers (ii)
dengan (-3) , lalu
tambahkan ke pers
(iii).

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$(iii) = -3(ii) + (iii)$$

kalikan pers (iii)
dengan (-2) .

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(iii) = -2 * (iii)$$

kalikan pers (ii)
dengan (-1) , lalu
tambahkan ke pers
(i).

$$\begin{aligned} x + \frac{11}{2}z &= \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(i) = -1(ii) + (i)$$

Lanjutan CONTOH

kalikan pers (ii)
dengan (-1), lalu
tambahkan ke pers
(i).

$$\begin{array}{rcl} x & + \frac{11}{2}z & = \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z & = -\frac{17}{2} \\ z & = 3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(i) = -1(ii) + (i)$$

kalikan pers (iii)
dengan (-11/2), lalu
tambahkan ke pers (i)
dan kalikan pers (iii) dg
(7/2), lalu tambahkan
ke pers (ii)

$$\begin{array}{rcl} x & & = 1 \\ y & & = 2 \\ z & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(i) = -11/2 * (iii) + (i)$$

$$(ii) = 7/2(iii) + (ii)$$

Diperoleh penyelesaian $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Terdapat kaitan menarik antara bentuk SPL dan representasi matriksnya.

- Diketahui SPL:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$

- Bagaimana penyelesaiannya?

Gauss Seidel

- Eliminasi Gauss-Seidel adalah metode yang menggunakan proses iterasi hingga diperoleh nilai-nilai yang berubah.
- Bila diketahui persamaan linier simultan:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\&\vdots \\x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1})\end{aligned}$$

- Dilakukan dengan suatu iterasi yang memberikan harga awal untuk $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$.
- Metode ini berlainan dengan metode Gauss Jordan karena metode ini menggunakan iterasi dalam menentukan harga $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.
- Kelemahan metode eliminasi dibandingkan metode iterasi adalah metode eliminasi sulit untuk digunakan dalam menyelesaikan SPL berukuran besar.

Algoritma Gauss Seidel

1. Beri harga awal $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$
2. Hitung
$$x_1 = \frac{C_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n)}{a_{11}}$$
3. x_1 baru yang didapat dari tahap 2 digunakan untuk menghitung x_2 .

$$\text{Baris 2} \rightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = C_2$$

$$x_2 = \frac{C_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

Algoritma Gauss Seidel

4. Menghitung x_3

$$\text{Baris 3} \rightarrow a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = C_3$$

$$a_{33}x_3 = C_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \dots - a_{3n}x_n$$

$$x_3 = \frac{C_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{34}x_4 - \dots - a_{3n}x_n}{a_{33}}$$

Algoritma Gauss Seidel

5. Cara ini diteruskan sampai ditemukan x_n .
6. Lakukan iterasi ke-2 untuk menghitung $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ baru

$$x_1 = \frac{C_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{C_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$\vdots$

$$x_n = \frac{C_n - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1(n-1)}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

7. Lakukan iterasi sampai error terkecil atau sampai nilai tidak berubah lagi

CONTOH

1. Tentukan solusi SPL

$$4x - y + z = 7$$

$$4x - 8y + z = -21$$

$$-2x + y + 5z = 15$$

Berikan nilai awal $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$

Susun persamaan menjadi :

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$y = \frac{21 + 4x + z}{8}$$

$$z = \frac{15 + 2x - y}{5}$$

Lakukan Proses Iterasi

Iterasi 1 :

$$x_1 = \frac{7 + 0 - 0}{4} = 1.75$$

$$y_1 = \frac{21 + 4(1.75) + 0}{8} = 3.5$$

$$z_1 = \frac{15 + 2(1.75) - 3.5}{5} = 3$$

Iterasi 2 :

$$x_2 = \frac{7 + 3.5 - 3}{4} = 1.875$$

$$y_2 = \frac{21 + 4(1.875) + 3}{8} = 3.9375$$

$$z_2 = \frac{15 + 2(1.875) - 3.9375}{5} = 2.9625$$

Iterasi 3:

$$x_3 = \frac{7 + 3.9375 - 2.9625}{4} = 1.99375$$

$$y_3 = \frac{21 + 4(1.99375) + 2.9625}{8} = 3.992188$$

$$z_3 = \frac{15 + 2(1.99375) - 3.992188}{5} = 2.999063$$

...

$$x_8 = 2$$

$$y_8 = 4$$

$$z_8 = 3$$

Terlihat bahwa selisih nilai x, y, z pada iterasi ke-8 dan ke-9 tidak berubah
Sehingga $x=2$, $y=4$ dan $z=3$

k	x _k	y _k	z _k
0	0	0	0
1	1.75	3.5	3
2	1.875	3.9375	2.9625
3	1.99375	3.992188	2.999063
4	1.998281	3.999023	2.999508
5	1.999879	3.999878	2.999976
6	1.999975	3.999985	2.999993
7	1.999998	3.999998	3
8	2	4	3
9	2	4	3
10	2	4	3

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$y = \frac{21 + 4x + z}{8}$$

$$z = \frac{15 + 2x - y}{5}$$