

Invers Matriks

INVERS MATRIKS

- Definisi :

Jika A dan B adalah sebarang matriks bujur sangkar sedemikian sehingga $AB=BA=I$. Maka B merupakan invers dari A atau A^{-1} dan sebaliknya.

Matriks yang mempunyai invers disebut invertible atau non singular.

- Untuk mendapatkan A^{-1} , dapat dilakukan dengan cara :

1. Metode Matriks Adjoint

2. Metode Operasi Baris Elementer (OBE)

atau Operasi Kolom Elementer (OKE)

Menurut definisi matriks invers :

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a+2c = 1 \quad b+2d = 0$$

$$3a+4c = 0 \quad 3b+4d = 1$$

$$\begin{array}{l|l} a+2c=1 & \times 2 \rightarrow 2a+4c=2 \\ 3a+4c=0 & \times 1 \rightarrow 3a+4c=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ - \end{array}$$

$$-a = 2$$

$$a = -2$$

$$3a + 4c = 0$$

$$4c = -3a$$

$$c = \frac{-3a}{4} = \frac{-3(-2)}{4}$$

$$c = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{rcl}
 b+2d=0 & | \times 2 & \rightarrow 2b+4d=0 \\
 3b+4d=1 & | \times 1 & \rightarrow 3b+4d=1 \quad - \\
 \hline
 & & -b \quad = -1 \\
 & & \underline{b \quad = 1}
 \end{array}$$

$$b + 2d = 0.$$

$$2d = -b$$

$$\underline{d = \frac{-b}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 11/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Mencari Invers dengan Matriks Adjoint

Invers dengan Metode Adjoint:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} \quad \text{dengan } |A| \neq 0$$

Carilah invers dari $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Solusi :

$$C_{11} = M_{11} = d$$

$$C_{21} = -M_{21} = -b$$

$$C_{12} = -M_{12} = -c$$

$$C_{22} = M_{22} = a$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Carilah invers dari $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Solusi :

$$\begin{array}{lll} C_{11} = M_{11} = -5 & C_{21} = -M_{21} = 4 & C_{31} = M_{31} = -4 \\ C_{12} = -M_{12} = 1 & C_{22} = M_{22} = -2 & C_{32} = -M_{32} = 0 \\ C_{13} = M_{13} = 1 & C_{23} = -M_{23} = 0 & C_{33} = M_{33} = 2 \end{array}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = (2)(-5) + (4)(1) + (4)(1) = -2$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mencari invers dengan OBE

Jika A matriks persegi non singular, dengan OBE terhadap A dapat direduksi menjadi bentuk normal I sedemikian hingga :

Teknis pencarian invers dengan OBE :

$$(A \mid I) \quad \sim \quad (I \mid A^{-1})$$

Mencari invers dengan OKE

Jika A matriks persegi non singular, dengan OKE terhadap A dapat direduksi menjadi bentuk normal I sedemikian hingga :

Teknis pencarian invers dengan OKE :

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hline I \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} I \\ \hline A^{-1} \end{array} \right)$$

Carilah invers dari dengan Operasi Baris Elementer (OBE)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow[b_3-b_1]{b_2-2b_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow{b_3+2b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{-b_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[b_2+3b_3]{b_1-3b_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{b_1-2b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Jadi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

SOAL !

Carilah invers dari $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ dengan melakukan OBE dan OKE

Clue : OBE

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Clue : OKE

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 4 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & & \\ -1 & -2 & -3 & & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right)$$

Sifat-sifat Matriks Invers

(1) Matriks invers (jika ada) adalah tunggal (*unique*)

Andaikan B dan C adalah invers dari matriks A, maka berlaku :

$$AB = BA = I, \text{ dan juga}$$

$$AC = CA = I$$

$$\text{Tetapi untuk : } BAC = B(AC) = BI = B \quad \dots\dots\dots (*)$$

$$BAC = (BA)C = IC = C \quad \dots\dots\dots (**)$$

Dari (*) dan (**) haruslah $B = C$.

(2) Invers dari *matriks invers* adalah matriks itu sendiri.

Andaikan matriks $C = A^{-1}$, berarti berlaku :

$$AC = CA = I \quad (*)$$

$$\text{Tetapi juga berlaku } C C^{-1} = C^{-1} C = I \quad (**)$$

Dari (*) dan (**) berarti :

$$C^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Sifat-sifat Matriks Invers

(3) Matriks invers bersifat nonsingular (determinannya tidak nol)

$$\det(A A^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$$

$$\det(I) = \det(A) \det(A^{-1})$$

$$1 = \det(A) \det(A^{-1}) ; \text{ karena } \det(A) \neq 0 , \text{ maka :}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

ini berarti bahwa $\det(A^{-1})$ adalah tidak nol dan kebalikan dari $\det(A)$.

(4) Jika A dan B masing-masing adalah matriks persegi berdimensi n , dan berturut-turut A^{-1} dan B^{-1} adalah invers dari A dan B, maka berlaku hubungan : $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$$(AB) (AB)^{-1} = (AB)^{-1} (AB) = I \quad (*)$$

di sisi lain :

$$(AB) (B^{-1} A^{-1}) = A(BB^{-1}) A^{-1} = A I A^{-1} = A A^{-1} = I$$

$$(B^{-1} A^{-1}) (AB) = B^{-1}(A^{-1}A) B = B^{-1} I B = B^{-1} B = I \quad (**)$$

Menurut sifat (1) di atas matriks invers bersifat unique (tunggal), karena itu dari (*) dan (**) dapatlah disimpulkan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Sifat-sifat Matriks Invers

(5) Jika matriks persegi A berdimensi n adalah non singular, maka berlaku $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Menurut sifat determinan : $|A^T| = |A| \neq 0$, oleh sebab itu $(A^T)^{-1}$ ada, dan haruslah :

$$(A^T)^{-1} A^T = A^T (A^T)^{-1} = I \quad (*)$$

Di sisi lain menurut sifat transpose matriks :

$$(A A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$$

$$I^T = (A^{-1})^T A^T$$

$(A^{-1})^T A^T = I$, hubungan ini berarti bahwa $(A^{-1})^T$ adalah juga invers dari A^T .

Padahal invers matriks bersifat tunggal, oleh karena itu memperhatikan (*), haruslah :

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} .$$