

ALJABAR LINER & MATRIKS

Dr. Ir. Kartini, S.Kom, MT

MATERI 2

MATERI 3

Matriks & Operasinya

Bab 1.3

Matriks:

1. Suatu kumpulan nilai bentuk empat-persegi-panjang
2. Terdiri dari baris-baris dan kolom-kolom
3. Tiap nilai dalam matriks disebut entri; cara menyebutkan entri adalah dengan subskrip / indeks (baris, kolom)

Contoh:

Matriks A =
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$
 semua entri: *real*

Matriks A terdiri dari 2 baris dan 3 kolom

$$A_{1,1} = 1$$

$$A_{1,2} = 5$$

$$A_{1,3} = 9$$

$$A_{2,1} = 7$$

$$A_{2,2} = 3$$

$$A_{2,3} = 0$$

Definisi-definisi:

1. Matriks $A =$ matriks B jika ukuran baris A & baris B dan ukuran kolom A & kolom B sama; dan entri $A_{i,j} =$ entri $B_{i,j}$
2. $C = A \pm B$, maka $C_{i,j} = A_{i,j} \pm B_{i,j}$
3. $M = cA$ ($c = \text{real} / \text{skalar}$), maka $M_{i,j} = cA_{i,j}$
4. Jika $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah matriks-matriks berukuran sama, dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah bilangan-bilangan skalar, maka $c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n$ disebut kombinasi linier dari $A_1, A_2, \dots, A_n$ dengan koefisien $c_1, c_2, \dots, c_n$.
5. Suatu matriks dapat di-partisi menjadi beberapa submatriks dengan “menarik” garis horisontal dan/atau garis vertikal.

Contoh:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right)$$

A_{11} A_{21}
 A_{21} A_{22}

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{array}$$

Definisi-definisi (lanjutan):

6. **Matriks A dikalikan dengan matriks B;**
syaratnya adalah banyaknya kolom A = banyaknya baris B.

Catatan: perhatikan bahwa perkalian matriks (kedua matriks bujursangkar dengan ukuran sama) tidak komutatif ($AB \neq BA$)

$$\text{Contoh: } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

kesimpulan : $AB \neq BA$

7. **Transpos(A) = matriks A dengan baris-kolom ditukar tempatnya**
8. **Trace(A) = jumlah semua entri diagonal $A = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}$**

Sifat perkalian matriks:

A matriks bujur sangkar, maka

1. $(A^r) (A^s) = A^{(r+s)}$

2. $(A^r)^s = A^{(rs)}$

Sifat-sifat matriks transpos:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(kA)^T = k (A^T)$
3. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Matriks-matriks khusus:

- 1. Matriks O = matriks nol; semua entrinya nol**
- 2. Matriks I_n = matriks identitas berukuran $(n \times n)$;
semua entri diagonalnya = 1, entri lain = 0**
- 3. Matriks (vektor) baris adalah matriks dengan 1 baris.**
- 4. Matriks (vektor) kolom adalah matriks dengan 1 kolom.**

Teorema: A, B, C merepresentasikan matriks

a, b merepresentasikan bilangan skalar

- 1. $A + B = B + A$**
- 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$**
- 3. $A(BC) = (AB)C$**
- 4. $A(B \pm C) = AB \pm AC$**
- 5. $(B \pm C)A = BA \pm CA$**
- 6. $a(B \pm C) = aB \pm aC$**
- 7. $(a \pm b)C = aC \pm bC$**
- 8. $a(bC) = (ab)C$**
- 9. $a(BC) = (aB)C = B(aC)$**

Teorema: **A, O merepresentasikan matriks**

O adalah matriks nol (semua entrinya = nol)

1. $A + O = O + A = A$

2. $A - A = O$

3. $O - A = -A$

4. $AO = O; OA = O$

Teorema:

A adalah matriks bujur sangkar berukuran $(n \times n)$

R adalah bentuk eselon-baris-tereduksi dari **A**.

Maka **R** berisi (satu/lebih) baris dengan entri nol seluruhnya, atau **R** adalah matriks identitas I_n .

Contoh: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 9/8 \end{pmatrix}$



baris-1 x $(1/2)$; baris-3 x $(1/8)$

Matriks Invers

Bab 1.4-1.6

Invers dari sebuah matriks:

A adalah matriks bujur sangkar

Jika $AB = BA = I$ maka B adalah invers dari A dan A adalah invers dari B. (invers matriks A dinotasikan dengan A^{-1})

Jika B invers dari A dan C juga invers dari A maka $B = C$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $D = ad - bc \neq 0$, maka invers A dapat dihitung dengan

$$A^{-1} = (1/D) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat matriks Invers:

Matriks A, B adalah matriks-matriks invertibel

- 1. $(A^{-1})^{-1} = A$**
- 2. A^n invertibel dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$**
- 3. (kA) adalah matriks invertibel dan $(kA)^{-1} = (1/k) A^{-1}$**
- 4. A^T invertibel dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$**
- 5. A dan B keduanya matriks invertibel, maka AB invertibel dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$**

Algoritma untuk mencari invers sebuah matriks A ($n \times n$)

ubah menjadi matrix identitas dengan menggunakan **OBE**.

Contoh:

1	2	3		1	0	0
2	5	3		0	1	0
1	0	8		0	0	1

matriks A

matriks identitas I

matriks A

1	2	3		1	0	0
2	5	3		0	1	0
1	0	8		0	0	1

dengan OBE dihasilkan

1	0	0		-40	16	9
0	1	0		13	-5	-3
0	0	1		5	-2	-1

invers A

matriks A			invers A		
1	2	3	-40	16	9
2	5	3	13	-5	-3
1	0	8	5	-2	-1

jika kedua matriks ini dikalikan, akan didapat

$$\left(\begin{array}{ccc} -40 + 26 + 15 & 16 - 10 - 6 & 9 - 6 - 3 \\ -80 + 65 + 15 & 32 - 25 - 6 & 18 - 15 - 3 \\ -40 + 0 + 40 & 16 - 0 - 16 & 9 - 0 - 8 \end{array} \right)$$

Matriks Elementer:

Matriks $A(n \times n)$ disebut elementer jika A dihasilkan dari matriks identitas I_n dengan satu Operasi Baris Elementer.

Contoh: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema:

A (nxn) matriks bujur sangkar.

Maka yang berikut ini ekuivalen
(semuanya benar, atau semuanya salah)

- 1. A invertibel**
- 2. $Ax = 0$ punya solusi trivial saja**
- 3. Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah I_n**
- 4. A dapat dinyatakan dalam perkalian matriks-matriks elementer**

Matriks-matriks dengan bentuk khusus

Bab 1.7

**Matriks $A(n \times n)$ bujur sangkar, artinya
banyaknya baris A sama dengan banyaknya kolom A .**

Bentuk-bentuk khusus sebuah matriks bujur sangkar a. l. :

- 1. Matriks diagonal D**
- 2. Matriks segi-3 atas**
- 3. Matriks segi-3 bawah**
- 4. Matriks simetrik**

1. Matriks diagonal D: $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{d_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{d_3} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{d_n} \end{pmatrix}$$

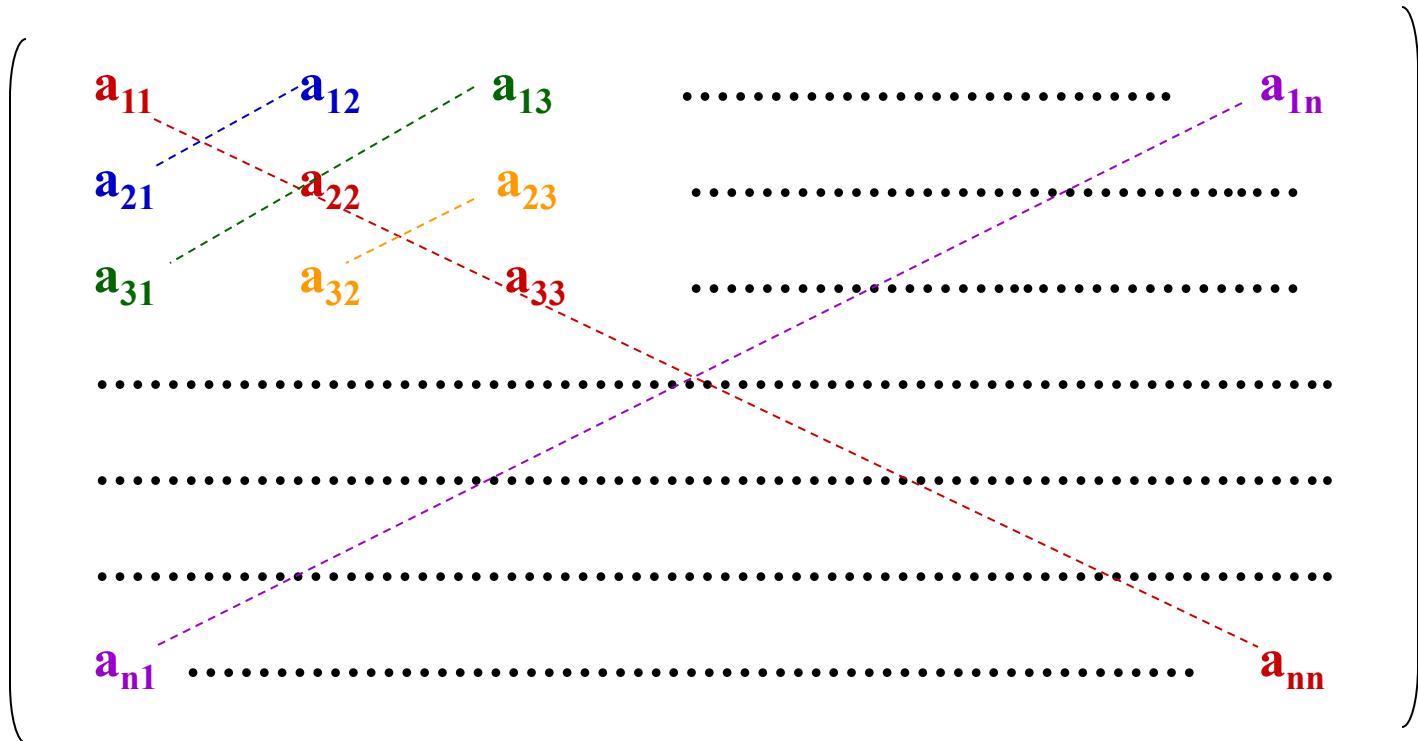
2. Matriks segi-3 atas: $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Matriks segi-3 bawah: $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Matriks simetrik: $a_{ij} = a_{ji}$



Teorema:

1. Transpos dari matriks segi-3 bawah adalah matriks segi-3 atas; transpos dari matriks segi-3 atas adalah matriks segi-3 bawah.
2. Perkalian dua matriks segi-3 bawah menghasilkan matriks segi-3 bawah; perkalian dua matriks segi-3 atas menghasilkan matriks segi-3 atas.
3. Matriks segi-3 invertibel jika dan hanya jika semua entri diagonalnya tidak nol.
4. Invers dari matriks segi-3 bawah adalah matriks segi-3 bawah.
5. Invers dari matriks segi-3 atas adalah matriks segi-3 atas.

Teorema:

A dan B matriks simetrik, k adalah skalar

6. A^T simetrik
7. $A + B$ simetrik dan $A - B$ simetrik
8. Matriks kA simetrik
9. Jika A invertibel, maka A^{-1} simetrik

Teorema:

10. Jika A matriks invertibel, maka AA^T dan A^TA juga invertibel.