



PERTEMUAN 6

ALJABAR LINIER & MATRIKS

Dr. Ir. Kartini , S.Kom, MT

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- Mengetahui definisi Sistem Persamaan Linier
- Dapat membentuk matriks yang merepresentasikan Sistem Persamaan Linier
- Dapat menyelesaikan Sistem Persamaan Linier dengan menggunakan metode Gauss dan Gauss Jordan



Persamaan Linier & Sistem Persamaan Linier

Bab 1.1

Persamaan linier :

Persamaan yang semua variabelnya berpangkat 1 atau 0 dan tidak terjadi perkalian antar variabelnya.

- Contoh:**
- (1) $x + y + 2z = 9 \longrightarrow \text{PL}$
 - (2) $2x + y = 9 \longrightarrow \text{PL}$
 - (3) $2xy - z = 9 \longrightarrow \text{Bukan PL}$

Solusi PL (1) : berupa suatu “tripel” dengan masing-masing nilai sesuai urutan (**nilai-x, nilai-y, nilai-z**) yang memenuhi persamaan tersebut.

Himpunan solusi untuk persamaan di atas:

$\{ \dots (0, 1, 4), (1, 0, 4), (4, 5, 0), \dots \}$

Himpunan solusi juga disebut Ruang Solusi (*solution space*)

Sistem Persamaan Linier:

Suatu sistem dengan beberapa (2 atau lebih) persamaan linier.

Contoh:

$$x + y = 3$$

$$3x - 5y = 1$$

Ruang Solusi:

berupa semua ordered-pair (nilai-x, nilai-y) yang harus memenuhi semua persamaan linier dalam sistem tersebut;
untuk sistem ini ruang solusinya $\{ (2, 1) \}$

PENYIMPANGAN PADA PENYELESAIAN SUATU SPL

Pada beberapa SPL tertentu terdapat penyimpangan – penyimpangan dalam penyelesaiannya, misal :

Diberikan SPL sebagai berikut :

$$\begin{aligned}x_1 + 1/2x_2 + 1/3x_3 &= 1 \\1/2x_1 + 1/3x_2 + 1/4x_3 &= 0 \\1/3x_1 + 1/4x_2 + 1/5x_3 &= 0\end{aligned}$$

Didapat penyelesaian $x_1 = 9$, $x_2 = -36$, dan $x_3 = 30$

Jika SPL tersebut dituliskan dalam bentuk dua desimal :

$$\begin{aligned}x_1 + 0,5x_2 + 0,33x_3 &= 1 \\0,5x_1 + 0,33x_2 + 0,25x_3 &= 0 \\0,33x_1 + 0,25x_2 + 0,2x_3 &= 0\end{aligned}$$

Didapat penyelesaian $x_1 \approx 55,55$; $x_2 \approx -277,778$; dan $x_3 \approx 255,556$

PENYIMPANGAN PADA PENYELESAIAN SUATU SPL (CONT'D)

Diberikan SPL sebagai berikut :

$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\x + 1.0001y &= 2\end{aligned}$$

$$\text{dan } \begin{aligned}x + y &= 2 \\x + 1.0001y &= 2,0001\end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}x &= 2 \\y &= 0\end{aligned}$$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}x &= 2 \\y &= 0\end{aligned}$$

Diberikan SPL sebagai berikut :

$$\begin{aligned}0,001x + y &= 1 \rightarrow x + 1000y = 1000 \\x + y &= 2 \rightarrow x + y = 2\end{aligned}$$

sehingga :

$$-9999y = -9998 \rightarrow y = 0,9999 \rightarrow x = 1,0001$$

Jika nilai y dibulatkan 3 desimal, didapat nilai $y \approx 1$, substitusikan ke persamaan pertama didapat nilai $x = 0$.

Interpretasi Geometrik:

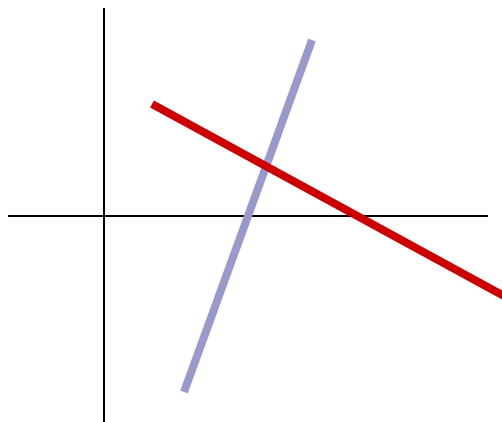
Sistem menggambarkan 2 garis lurus pada sebuah bidang datar.

$$g_1: \quad x + y = 3$$

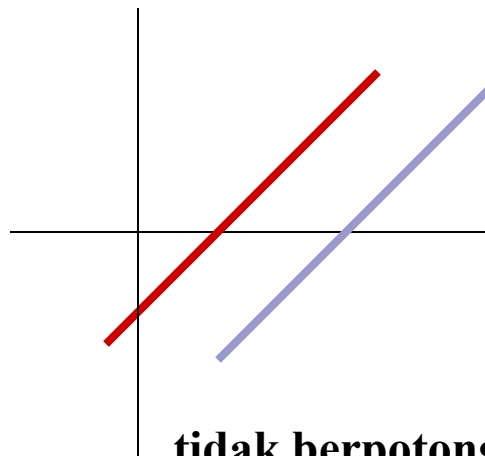
$$g_2: \quad 3x - 5y = 1$$

Solusi: g_1 dan g_2 berpotongan di $(2, 1)$

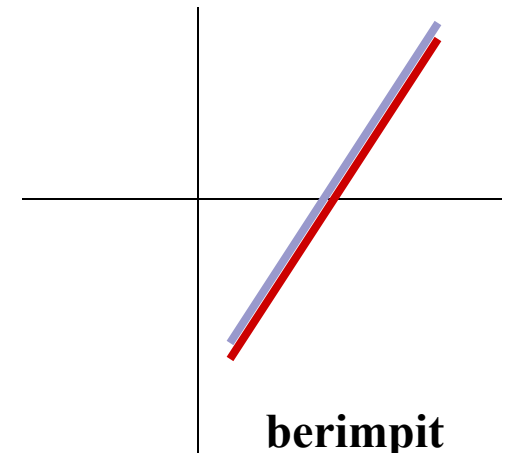
Kemungkinan:



berpotongan di 1 titik



tidak berpotongan



berimpit

Sistem Persamaan Linier



Metode Gauss dan Gauss-Jordan

Bab 1.2

Solusi Sistem Persamaan Linier

- a. Cara Biasa $\rightarrow$ Seperti SMA
- b. Eliminasi Gauss
- c. Eliminasi Gauss - Jordan

a. Cara Biasa (untuk mengingat kembali):

I. $x + y = 3 \rightarrow 3x + 3y = 9$

$$3x - 5y = 1 \rightarrow \frac{3x - 5y = 1}{} \quad -$$

$$8y = 8 \rightarrow y = 1$$

$$3x - 5 = 1 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

II. $y = 3 - x$

$$3x - 5(3 - x) = 1 \text{ atau } 3x - 15 + 5x = 1 \rightarrow 8x = 16 \rightarrow x = 2$$

$$y = 3 - x \rightarrow y = 1$$

Matriks *Augmented* : (Matriks yang diperbesar)

Matriks yang entri-entrinya dibentuk dari koefisien-koefisien Sistem Persamaan Linier

Contoh : $x + y + 2z = 9$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Matriks *Augmented*-nya :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

b. Eliminasi Gauss (lihat contoh 3, halaman 5)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ditulis} \\ \text{dalam} \\ \text{bentuk} \\ \text{matriks} \\ \text{augmented} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

lalu diusahakan berbentuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? \end{array} \right)$$

dengan proses **Operasi Baris Elementer (OBE)**

(Elementary Row Operation - ERO)

Sistem Persamaan Linier

Operasi Baris Elementer (OBE)

(Elementary Row Operation - ERO)

Perhatikan bahwa tiap baris dari matriks merepresentasikan persamaan linier

1. Mengalikan suatu baris dengan bilangan nyata $k \neq 0$
2. Menukar posisi dua baris
3. Menambah baris-i dengan k kali baris-j

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{baris-3} + (-3) \times \text{baris-1}]{\text{baris-2} + (-2) \times \text{baris-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right)$$

baris-3 + $(-3/2) \times$ baris-2

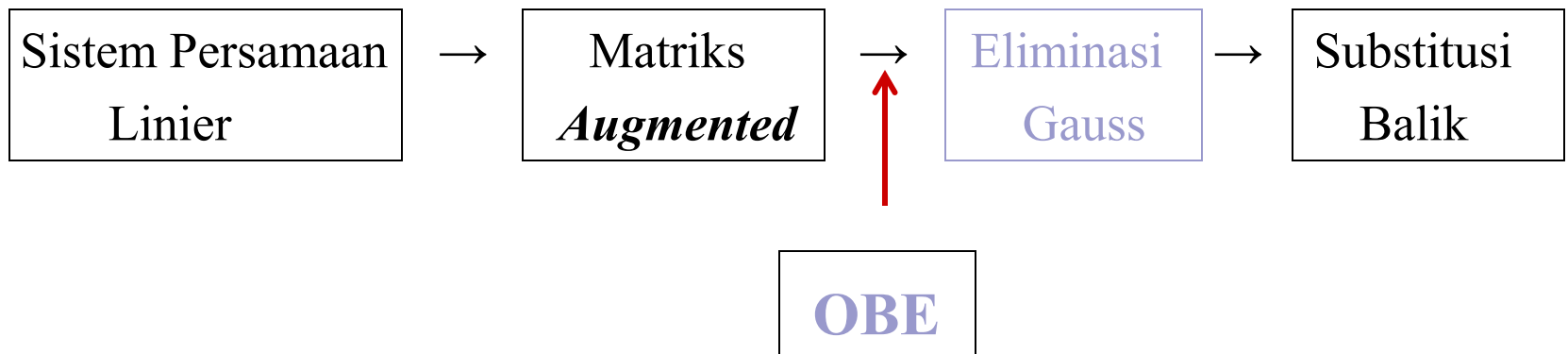
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array} \right)$$

	x	y	z		
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array} \right)$					Substitusi Balik:
				$\longrightarrow$	$-1/2 z = -3/2 \longrightarrow z = 3$

$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array} \right)$		$\longrightarrow$	$2y - 7z = -17$
			$2y = 21 - 17 \longrightarrow y = 2$

$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array} \right)$		$\longrightarrow$	$x + y + 2z = 9$
			$x = -2 - 6 + 9 \longrightarrow x = 1$

Eliminasi Gauss (ringkasan):



c. Eliminasi Gauss-Jordan (contoh yang sama)

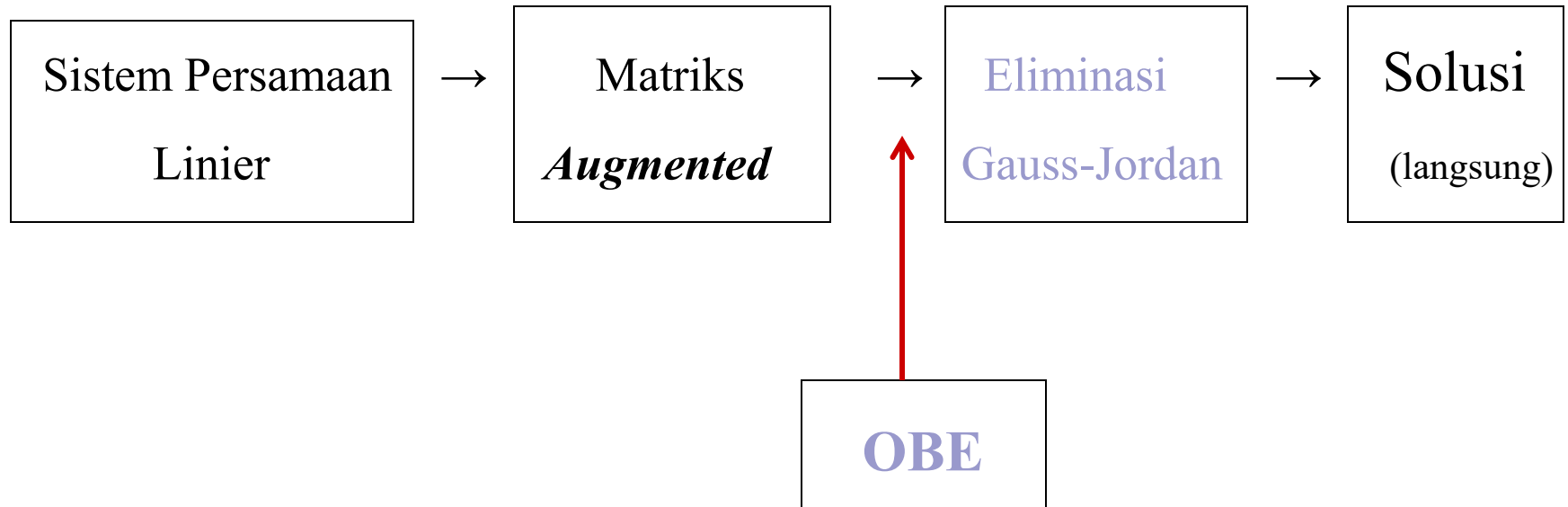
$$\begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 9 \\ 2x + 4y - 3z & = & 1 \\ 3x + 6y - 5z & = & 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

dan diusahakan berbentuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \end{array} \right)$$

dengan proses **Operasi Baris Elementer (OBE)**
(*Elementary Row Operation - ERO*)

Eliminasi Gauss-Jordan (ringkasan):



Bentuk eselon baris:

1. Entri-entri dalam sebuah baris tidak semuanya nol, maka entri pertama yang tidak nol harus 1 (disebut 1-utama / *leading-1*)
2. Baris-baris yang semua entrinya 0, dikelompokkan di bagian bawah matriks
3. Posisi 1-utama dari baris yang lebih bawah harus lebih ke kanan d/p 1-utama baris yang lebih atas

Bentuk eselon baris tereduksi:

- 1, 2, 3, ditambah
4. Semua entri (yang lain) dari kolom yang berisi 1-utama harus di-0-kan

Suatu SPL mempunyai 3 kemungkinan jawaban, yaitu :

1. Mempunyai jawaban tunggal
2. Mempunyai banyak jawaban
3. Tidak mempunyai jawaban

Contoh :

Tentukan nilai a agar SPL berikut:

$$x - 2y + 3z = 1$$

$$2x - 3y + 9z = 4$$

$$x - 3y + (a^2 - 4)z = 1 + a$$

- i. Mempunyai jawaban tunggal
- ii. Mempunyai banyak jawaban
- iii. Tidak mempunyai jawaban

Penyelesaian :

Matriks Eselon SPL di atas adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 + a^2 & 2 + a \end{bmatrix}$$

- i. Mempunyai jawaban tunggal
 $a^2 - 4 \neq 0$, $a \neq -2$ dan $a \neq 2$
- ii. Mempunyai banyak jawaban
 $a^2 - 4 = 0$ dan $a + 2 = 0 \rightarrow a = -2$
- iii. Tidak mempunyai jawaban
 $a^2 - 4 = 0$ dan $a + 2 \neq 0 \rightarrow a = 2$

Sistem Persamaan Linier Homogen :

1. Sistem Persamaan Linier dikatakan homogen jika semua suku di kanan tanda “=” adalah 0.
2. Solusi Sistem Persamaan Linier Homogen:

Solusi Trivial (semua $x_i = 0$; $i = 1 \dots n$): pasti ada

Solusi Non-trivial (solusi trivial, *plus* solusi di mana ada $x_i \neq 0$)

Contoh: lihat contoh 6 halaman 18 dan verifikasi proses penyelesaiannya

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Contoh: lihat contoh 6 halaman 18 dan verifikasi proses penyelesaiannya

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{Brs-1} \times (1/2)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Brs-2} + \text{brs-1} \\ \text{Brs-3} - \text{brs-1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Brs-2} \times (2/3) \\ \text{Brs-3} \times (-2/3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Brs-3} - \text{brs-2} \\ \text{Brs-4} - \text{brs-2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Brs-3} \times (1/2) \\ \text{Brs-4} \times (1/3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{Brs-4} - \text{brs-3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

baris-1 + (1/2) × baris-2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 0$$

$$x_3 + x_5 = 0$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = s \rightarrow x_3 + x_5 = 0 \rightarrow x_3 = -x_5$$

$$x_2 = t \rightarrow x_1 + x_2 + x_5 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2 - x_5$$

$$\text{Ruang solusinya} = \{ (-t-s, t, -s, 0, s) \}$$

Teorema:

Sistem Persamaan Linier Homogen dengan **variabel** lebih banyak d/p. **persamaan** mempunyai tak berhingga banyak pemecahan.

Ditinjau dari matriksnya:

Sistem Persamaan Linier Homogen dengan **kolom** lebih banyak d/p. **baris** mempunyai tak berhingga banyak pemecahan.

