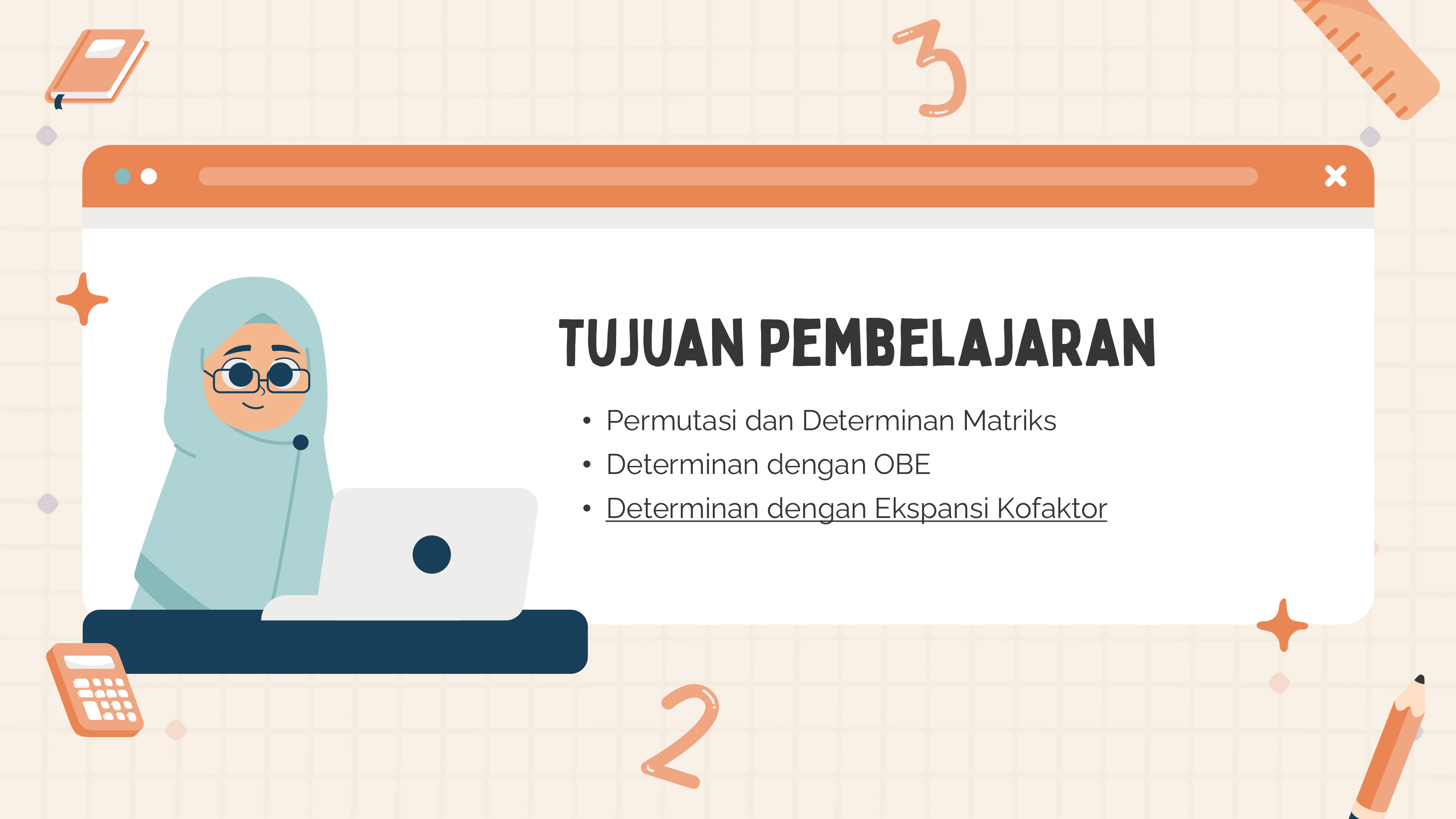




Pertemuan 04

DETERMINAN MATRIKS



TUJUAN PEMBELAJARAN

- Permutasi dan Determinan Matriks
- Determinan dengan OBE
- Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

PERMUTASI

Permutasi adalah...

Susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan

Contoh...

Misal kita punya 3 nilai {1, 2, 3} maka permutasinya (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)

Untuk mencari jumlah **permutasi** kita menggunakan **faktorial** (berlambang $n!$)

Misal untuk contoh sebelumnya, $3! = 6$



PERMUTASI - II

Invers Dalam Permutasi

Kita lakukan perbandingan antar 2 bilangan dalam baris. Dikatakan Invers jika bilangan kiri lebih besar dari kanan (tidak urut)

Contoh... Berapa Invers Permutasi dari {1, 2, 3} ?

$(1,2,3) \rightarrow 0 + 0 = 0 \rightarrow$ genap

$(1,3,2) \rightarrow 0 + 1 = 1 \rightarrow$ ganjil Inversnya: (3,2)

$(2,1,3) \rightarrow 1 + 0 = 1 \rightarrow$ ganjil

$(2,3,1) \rightarrow 1 + 1 = 2 \rightarrow$ genap

$(3,1,2) \rightarrow 2 + 0 = 2 \rightarrow$ genap

$(3,2,1) \rightarrow 2 + 1 = 3 \rightarrow$ ganjil





DETERMINAN MATRIKS

Apa Itu?

Sebuah nilai skalar didapatkan dari jumlah **semua hasil kali elementer** dari sebuah matriks yang masing-masing dikalikan dengan **tanda positif** atau **negatif** sesuai dengan permutasinya.

Determinan dapat kita gunakan untuk :

- Menentukan apakah matriks punya invers atau tidak (*jika $\neq 0$ maka memiliki*)
- Solusi Sistem Persamaan Linear dalam machine learning
- Transformasi dalam grafika komputer

Notasinya

Det(A) atau $|A|$

Syarat:

Matriks Persegi



DETERMINAN MATRIKS

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Misalkan kita punya sebuah matriks A dengan proporsi seperti gambar.

Pertama kita harus mencari hasil kali elementer



HASIL KALI ELEMENTER

adalah perkalian beberapa elemen matriks yang dipilih satu dari setiap baris dan satu dari setiap kolom (Tidak boleh sama baris & kolom)

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Garis Hitam Baris Kali Elementer

Garis biru?



DETERMINAN MATRIKS

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Dengan ilmu permutasi, kita temukan semua kombinasi hasil kali elementer!

a_{11}, a_{22}, a_{33}

a_{11}, a_{32}, a_{23}

.....



DETERMINAN MATRIKS

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

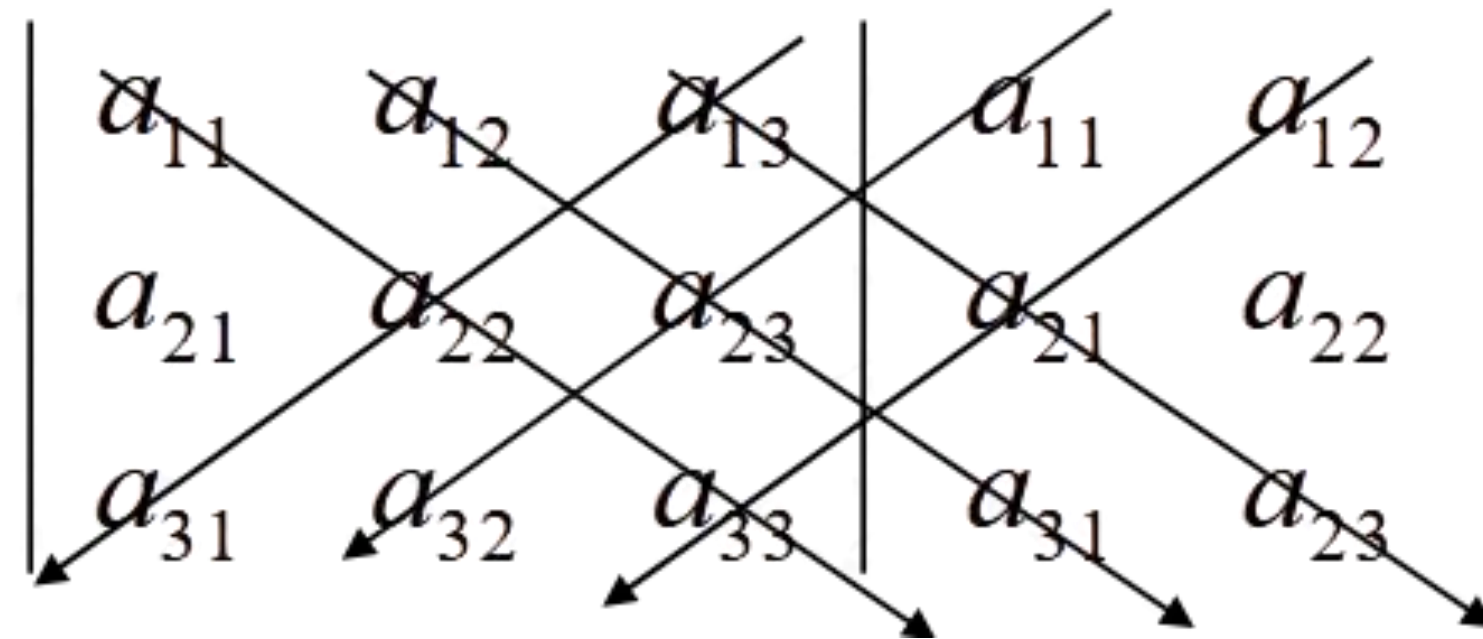
Agar lebih mudah, kita gunakan aturan **Sarrus**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$





DETERMINAN MATRIKS



Aturan Sarrus kita gunakan untuk mempermudah mencari permutasi (6):

$$a_{11} a_{22} a_{33}, a_{11} a_{23} a_{32}, a_{12} a_{21} a_{33}, \\ a_{12} a_{23} a_{31}, a_{13} a_{21} a_{32}, a_{13} a_{22} a_{31}$$





MENENTUKAN TANDA PADA HASIL KALI ELEMENTER

Kita sudah menemukan **semua hasil kali elementer** yang akan dihitung. Selanjutnya kita menentukan apakah hasil kali elementer itu bersifat **negatif (-)** atau **Positif (+)**

Dengan menghitung **Ganjil dan Genap Invers Permutasi Kolomnya!**

Dimana:

Invers Permutasi Genap = **Positif**

Invers Permutasi Ganjil = **Negatif**

DETERMINAN MATRIKS

Identifikasi notasi + atau - nya!

$$a_{11} a_{22} a_{33}, a_{11} a_{23} a_{32}, a_{12} a_{21} a_{33},$$
$$a_{12} a_{23} a_{31}, a_{13} a_{21} a_{32}, a_{13} a_{22} a_{31}$$

Maka

$$\text{Det}(A_{3 \times 3}) = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} +$$
$$a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$



WAKTUNYA KUIS

PERTANYAAN

Diberikan matriks $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Berapakah nilai determinan dari matriks B?

A. 1

C. 0

B. 3

D. 4

PERTANYAAN

Diberikan matriks $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Berapakah nilai determinan dari matriks B?

A. 1

C. 0

B. 3

D. 4

MENGHITUNG DETERMINAN MATRIKS KHUSUS

Ordo 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

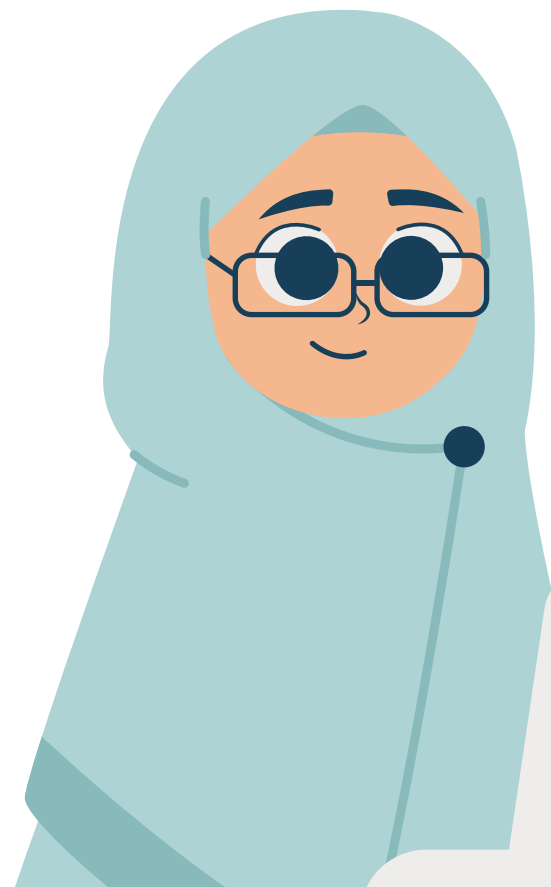
Matriks Segitiga Atas

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24$$

Matriks Segitiga Bawah

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 45$$

DETERMINAN DENGAN OBE



An illustration of a woman with dark hair in a ponytail, wearing a light blue short-sleeved shirt and a teal skirt. She is smiling and holding a dark blue book in her left hand. Her right hand holds a thin blue pointer stick, pointing towards the top of a white rectangular screen. The screen has an orange header bar with three small circles (red, white, blue) on the left and a white 'X' icon on the right. The background is a light beige grid pattern. There are decorative orange numbers '2' in the top left and '3' in the bottom right, along with orange pencils and rulers in the corners.

LANGKAH Pengerjaan

1. Sebuah Matriks Persegi Disajikan
2. Lakukan OBE hingga Matriks berbentuk Segitiga Atas / Segitiga Bawah
3. Cek Slide 16



WAKTUNYA KUIS (OBE)



PERTANYAAN

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Berapa Determinan-nya? Kerjakan dengan rumus OBE!

A. 6

B. 2

C. 4

D. 8

PERTANYAAN

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Berapa Determinan-nya? Kerjakan dengan rumus OBE!

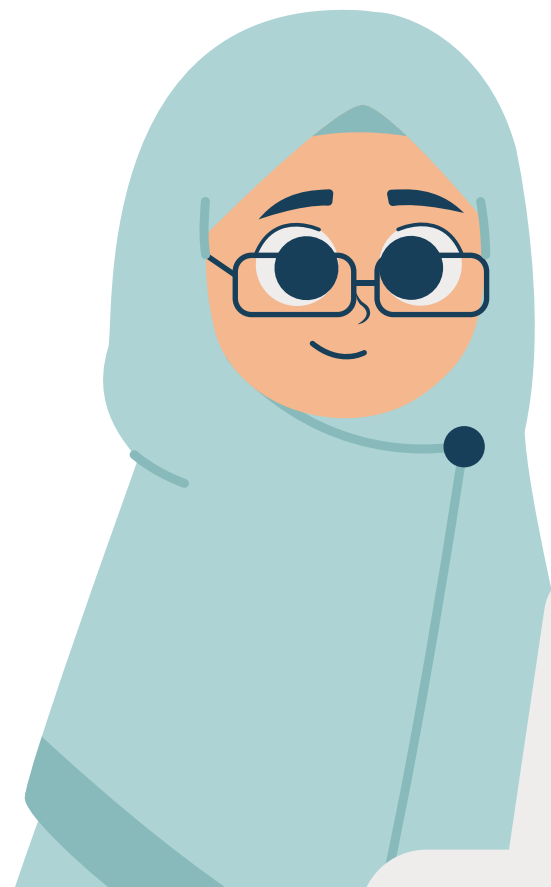
A. 6

B. 2

C. 4

D. 8

HUBUNGAN DETERMINAN DAN OBE



OBE 1

Jika matriks B berasal dari matriks A dengan satu kali pertukaran baris, maka $\text{Det}(B) = -\text{Det}(A)$

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3$

maka

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

OBE 2

Jika matriks B berasal dari matriks A dengan mengalikan satu baris dengan konstanta k, maka $\text{Det}(B) = k\text{Det}(A)$

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3$

dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ B2 x 2

maka

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2|A| = 6$$

OBE 3

Jika matriks B berasal dari matriks A dengan perkalian sebuah baris dengan konstanta tak nol k lalu dijumlahkan pada baris lain maka $\text{Det}(B) = \text{Det}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -12$$

Matriks B = Lakukan OBE = $-2b_1 + b_2$ ke Matriks A

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -12$$



TERIMA KASIH