



PERTEMUAN 4

ALJABAR LINIER & MATRIKS

■ Dr. Ir. Kartini, S.Kom, M.T

- Determinan orde dua dan tiga.
 - - Minor, Cofaktor
 - - Matriks Cofaktor
 - - Adjoin
- - Menghitung determinan. Cara sarrus Cara perluasan Cofaktor

TUJUAN

Setelah menyelesaikan pertemuan ini mahasiswa diharapkan :

- ☐ Dapat menghitung determinan
- ☐ Dapat menyelesaikan Sistem Persamaan Linier dengan menggunakan determinan



DETERMINAN

Bab 2.1-2.4

Landasan Teori Fungsi Determinan

Hasil kali elementer (*elementary product*):

Dalam sebuah matriks A (n x n) yang disebut hasil kali elementer

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$$

Catatan: indeks baris : selaluurut 1, 2, 3, ..., n

indeks kolom: urutan permutasi $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$

Hasil kali elementer bertanda (*signed elementary product*):

Jika $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ merupakan inversi

- genap, maka hasil kali elementer adalah positif
- gasal, maka hasil kali elementer adalah negatif

Definisi (formal) DETERMINAN:

Matriks A ($n \times n$). Fungsi determinan, dinotasikan $\det(A)$, adalah jumlah semua hasil kali elementer bertanda.

Contoh: A (3×3); jumlah semua hasil kali elementer bertanda adalah jumlah dari semua (6) elemen berikut ini:

$$+ a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$+ a_{11} a_{22} a_{33} \text{ (inversi = 0)}$$

$$+ a_{12} a_{23} a_{31} \text{ (inversi = 2)}$$

$$+ a_{13} a_{21} a_{32} \text{ (inversi = 2)}$$

$$- a_{11} a_{23} a_{32} \text{ (inversi = 1)}$$

$$- a_{12} a_{21} a_{33} \text{ (inversi = 1)}$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} \text{ (inversi = 3)}$$

Fungsi Determinan

contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Det(A) =}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the calculation of the determinant of matrix B using Sarrus' rule. The matrix is shown with its elements. Red dashed arrows indicate the products of the three diagonals going down-right (1*5*9, -4*6*7, 3*-8*-4) and three diagonals going up-right (3*5*7, 1*-8*6, 2*9*-4). Below the first two columns of the matrix, there are three red minus signs. To the right of the matrix, the numbers 1, 2, 3 are aligned with the first row, -4, 5, 6 with the second row, and 7, -8, 9 with the third row.

$$\mathbf{Det(B) =}$$

Landasan Teori Fungsi Determinan

selesai

review:

1. Menghitung $\det(A)$ di mana A matriks (2×2) atau (3×3) cukup mudah.
2. Menghitung $\det(A)$ di mana A matriks $(n \times n)$ untuk semua $n \geq 2$ secara umum dilakukan dengan menjumlahkan semua hasil kali elementer bertanda dari matriks A .

Cara lain untuk menghitung $\det(A)$, di mana $A(n \times n)$, adalah dengan

Reduksi Baris (Operasi Baris Elementer).

1. Matriks A diubah menjadi matriks segi-3 atas (segi-3 bawah), matriks segi-3 ini disebut A' .
2. $\det(A) = \det(A') =$ hasil kali semua entri diagonal utama matriks A' .

Teorema:

1. Bila $A(n \times n)$ matriks segitiga atas/bawah, maka $\text{Det}(A)$ adalah *hasil kali dari elemen-elemen diagonal utama*.

Contoh: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 7 & -3 \\ 0 & \mathbf{-3} & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$ $\text{Det}(A) =$

Bukti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

Secara umum: untuk $A(3 \times 3)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal utama

$$+ a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$\neq 0$$

$$- a_{11} a_{23} a_{32}$$

$$+ a_{12} a_{23} a_{31}$$

$$- a_{12} a_{21} a_{33}$$

$$+ a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31}$$

Teorema:

Matriks A ($n \times n$), terhadap A dilakukan OBE

2. Bila B berasal dari matriks A yang salah satu barisnya dikalikan dengan skalar k , maka $\det(B) = k \times \det(A)$
3. Bila B berasal dari matriks A dengan menukar dua barisnya, maka $\det(B) = -\det(A)$
4. Bila B berasal dari matriks A dengan menambahkan kelipatan salah satu baris A pada baris lain, maka $\det(B) = \det(A)$

Teorema:

5. $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T)$
6. $\text{Det}(A) = 0$ bila
 - *Ada 2 baris / 2 kolom yang sebanding*
 - *Ada satu baris-nol / satu kolom-nol*
7. Jika A dan B matriks bujur sangkar berukuran sama, maka $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
8. Jika A, B, C matriks bujur sangkar berukuran sama, dan baris ke-r matriks C didapat dari penjumlahan baris ke-r matriks A dan baris ke-r matriks B, maka $\det(C) = \det(A) + \det(B)$
9. “idem” untuk **kolom**

Teorema:

10. Matriks $A(n \times n)$ invertibel jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$

11. Jika A matriks invertibel dengan invers A^{-1} , maka

$$\det(A^{-1}) = 1 / (\det(A))$$

12. Jika A matriks bujur sangkar ukuran $n \times n$, maka $\det(kA) = k^n \det(A)$

13. Andaikan E adalah suatu matriks dasar $n \times n$, maka :

- Jika E dihasilkan dari mengalikan suatu baris dari I_n dengan k , maka $\det(E) = k$
- Jika E dihasilkan dari mempertukarkan dua baris dari I_n , maka $\det(E) = -1$
- Jika E dihasilkan dari menambahkan suatu penggandaan satu baris dari I_n ke baris lainnya, maka $\det(E) = 1$

Contoh :

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) =$$

$$\det(A1) =$$

$$\det(A2) =$$

$$\det(A3) =$$

Mengapa ??

3.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

Teorema:

Ada 7 pernyataan yang ekuivalen (semua benar, atau semua salah), sebagai berikut:

1. Matriks A invertibel (ada A^{-1})
2. SPL homogen $Ax = 0$ punya solusi trivial saja
3. Bentuk eselon baris terduksi matriks A adalah matriks I_n .
4. Matriks A dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks-matriks elementer
5. SPL $Ax = b$ konsisten (ada solusi) untuk tiap matriks / vektor kolom b ($n \times 1$)
6. SPL $Ax = b$ punya satu solusi untuk tiap matriks b ($n \times 1$)
7. $\text{Det}(A) \neq 0$

Terminologi: A matriks (3 x 3)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Minor (a_{ij}) disingkat M_{ij} : determinan dari sub-matriks yang tersisa jika baris-i dan kolom-j dihapus dari matriks A

Cofactor (a_{ij}) disingkat $C_{ij} : (-1)^{i+j} M_{ij}$

Cofactor (a_{ij}) disingkat $C_{ij} : (-1)^{i+j} M_{ij}$

Adjoint(A) disingkat $\text{adj}(A)$:

Matriks yang terbentuk dari *cofactors* A

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

Teorema:

A matriks (nxn).

Det(A) dapat dihitung dengan **ekspansi cofactor** sepanjang salah satu baris, atau sepanjang salah satu **kolom** dari A.

Ekspansi sepanjang baris-i:

$$\text{Det (A)} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

Ekspansi sepanjang kolom-j:

$$\text{Det (A)} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$$

Teorema:

Jika A matriks invertibel, maka

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$$

Aturan Cramer:

Solusi untuk Sistem Persamaan Linier $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{A}$ matriks koefisien ($n \times n$) dan $\mathbf{b}$ vektor ($n \times 1$)) dapat ditentukan dengan :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

di mana A_i adalah matriks A dengan menggantikan **kolom- i** dengan (vektor) $\mathbf{b}$



Contoh :

Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan SPL berikut :

$$x + 2z = 6$$

$$-3x + 4y + 6z = 30$$

$$x - 2y + 3z = 8$$

Penyelesaian :





Ruang Solusi dari Sistem Persamaan Linier $Ax = b$ dapat dicari dengan cara:

- 1. Eliminasi-substitusi**
- 2. Eliminasi Gauss & substitusi balik**
- 3. Eliminasi Gauss-Jordan**
- 4. Menentukan invers A^{-1} , lalu $x = A^{-1}b$**
- 5. Aturan Cramer**