

(1)



Pertemuan 03

Matriks dan Operasinya



2)

1

Apa yang Kita Bahas?

1.

Operasi Dasar Matriks
(Lanjutan)

2.

Operasi Baris Elementer (OBE)

3.

Esilon Baris dan Esilon Baris
Tereduksi

4.

Invers Matriks

Kemarin...
Kita Mempelajari
Skalar x Matriks . .

Perkalian Matriks x Matriks

Misalkan kita punya matriks...

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

dan...

$$\begin{bmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{bmatrix}$$



Perkalian Matriks x Matriks

Maka proses perkaliannya adalah:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} ap+bq+cr & as+bt+cu \\ dp+eq+fr & ds+et+fu \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Hasil perkalian Matriks x Matriks dapat merubah ordo sesuai dengan baris dan kolom matriks yang diproses.

Dalam Matriks tidak ada operasi pembagian. Pembagian dilakukan dengan invers matriks

Contoh Soal

Diketahui sebuah matriks A..

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berapa hasil perkalian

a. $A A^t$

b. $A^t A$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

maka

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

sedangkan

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Operasi Baris Elementer

Apa Itu?

Adalah sekumpulan operasi untuk **mengubah bentuk matriks** namun **tidak mengubah maknanya**

3 “Aturan Main” OBE:

- Perttukaran baris ($\mathcal{R}_i \leftrightarrow \mathcal{R}_j$)
- Perkalian suatu baris dengan skalar ($k \cdot \mathcal{R}_i$)
- Penjumlahan hasil perkalian skalar ($\mathcal{R}_i + k \cdot \mathcal{R}_j$)



OBE 1 - Pertukaran Baris

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} b_1 \leftrightarrow b_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

OBE 2 - Perkalian dengan Skalar

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{1/4 \mathbf{b}_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

OBE 3 – Penjumlahan Hasil Perkalian

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad -2b_1 + b_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks Esilon Baris & Tereduksi

Adalah proses penyederhanaan Matriks dengan menggunakan OBE agar mudah untuk digunakan dalam perhitungan SPL dan mencari **Invers nya**

Kriteria Esilon Baris & Esilon Baris Tereduksi

- Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1 (dinamakan satu utama).
- Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan.
- Jika ada baris nol (baris yang semua unsurnya nol), maka ia diletakkan pada baris paling bawah.
- Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah nol. (**tereduksi**)

Contoh Ideal Matriks Esilon Baris Tereduksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Jika kita lihat kriterianya . . .

- Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1 (dinamakan satu utama).
- Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan.
- Jika ada baris nol (baris yang semua unsurnya nol), maka ia diletakkan pada baris paling bawah.
- Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah nol.

Contoh Soal

Tentukan matriks esilon baris tereduksi dari matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Langkah OBE (Tidak Harus Sama)

1.

$-2b_1 + b_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3.

$-2b_2 + b_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

2.

Tukar b_2 dan b_3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

4.

Coba dari sini apakah ada yang berani melanjutkan?

Langkah OBE (Tidak Harus Sama)

4

$-1 \times b3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6

$b2+b1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5

$-b3+b2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7

Selesai!



Kita Coba Periksa

1	0	0	1
0	1	0	2
0	0	1	3

- Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1 (dinamakan satu utama).
- Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan.
- Jika ada baris nol (baris yang semua unsurnya nol), maka ia diletakkan pada baris paling bawah.
- Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah nol. **(tereduksi)**

Matriks Invers

Adalah anti dari sebuah matriks.
Matriks ini **dapat mengembalikan**
suatu matriks ke bentuk identitasnya

Memiliki notasi pangkat negatif:

$$A^{-1}$$



Contoh Matriks Invers

Misal kita memiliki matriks...

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Kita coba
bersama
melakukan
Invers ...

Langkah 1 : Augmentasi Matriks dengan Matriks Identitas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Lakukan OBE pada Kedua Matriks

1.

Tukar Baris

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3.

$-1 \times b2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

2.

$-3b1+b2$ & $2b1+b3$ (Paralel)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

4.

$-b3 + b2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Lakukan OBE pada Kedua Matriks

5

$$-b_2 + b_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

6

Selesai!



Pembuktian Matriks Invers

Matriks
lama
menjadi
Identitas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Identitas jadi Invers

Jika Kedua Matriks Dikalikan...

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1

Sekian
Materi Hari
Ini!



2